# Tentamen Schade Actuariaat 1 — 01/11/2007

*Weging: elke opgave en elk onderdeel met aparte* letter *(a), (b), ... telt voor 1 punt.*

N.B. Dit is het tentamen zoals afgenomen; komt op sommige plaatsen niet precies overeen met de oudere versie die op Blackboard staat.

1. Neem aan dat een verzekerde met nutsfunctie $u(w)$ en kapitaal $w_0$ een verlies $X$ wil verzekeren.

   (a) Aan welke vergelijking moet de zero-nutspremie $\pi[X]$ voldoen?

   (b) Neem aan dat bekend is dat voor een zeker risico $Y$ met $\mathrm{E}[Y] = \mathrm{Var}[Y] = 100$, deze premie gelijk is aan $\pi[Y] = 110$. Voor een risico $X$ met $\mathrm{E}[X] = 100$ en $\mathrm{Var}[X] = 400$, geef een benaderde waarde voor $\pi[X]$. Motiveer uw antwoord.

$\triangleright$ (a) Het verwacht nut voor en na verzekering moet overeenkomen, dus

$u(w_0 - \pi[X]) = \mathrm{E}[u(w_0 - X)]$.

(b) Gebruik de benadering voor de zero-nutspremie $\pi]Z] \approx \mathrm{E}[Z] + \frac{1}{2}\alpha\,\mathrm{Var}[Z]$ met $\alpha = \frac{-u''(w_0-\mu)}{u'(w_0-\mu)}$.

Blijkbaar geldt $\frac{1}{2}\alpha\,\mathrm{Var}[Y] \approx 10$, dus $\alpha \approx .2$, dus $\pi[X] \approx 140$.

De veiligheidsopslag in de premie voor $X$ is $\mathrm{Var}[X]/\,\mathrm{Var}[Y]$ maal zo groot als die voor $Y$.

2. Laat zien dat de stop-loss premie bij een gamma($\alpha, \beta$) stochast gegeven wordt door de formule

$$\mathrm{E}[(S-d)_+] = \frac{\alpha}{\beta}\big[1 - G(d; \alpha+1, \beta)\big] - d\big[1 - G(d; \alpha, \beta)\big].$$

$\triangleright$ Zie Opg. 3.10.4.

3. In R worden in array X opgeslagen de *gesorteerde* maandelijkse loss-ratios (schadetotaal gedeeld door verdiende premie, in %) over een periode van vijf jaar. Vervolgens worden voor deze steekproef van gegevens een paar grootheden uitgerekend.

```
X <- c(79, 82, 82, 85, 85, 86, 86, 86, 86, 87, 87, 88,
       88, 88, 89, 89, 89, 89, 90, 90, 90, 91, 91, 91,
       92, 92, 92, 94, 95, 95, 95, 96, 97, 97, 98, 98,
       98, 99, 99, 99, 99, 99,100,101,101,102,103,104,
      104,108,108,109,110,110,111,112,113,118,121,126)
k1 <- mean(X); k2 <- mean((X-k1)^2); k3 <- mean((X-k1)^3);
k1; k2; k3   ## Uitkomsten: 96.5, 101, 790
```

   (a) Gebruik een normale benadering om te schatten hoe groot de kans is dat er een loss ratio van 120% of meer optreedt. Vergelijk die kans met de waargenomen frequentie in de historische data.

   (b) In de laatste vijf jaar is het niet voorgekomen dat de loss-ratio de waarde 130% overschreed, maar die kans is vast niet nul. Om hiervoor een betere waarde te schatten dan met de methode uit Opgave 3a neemt men aan dat de loss ratio een verschoven gamma verdeling heeft. Om parameterschattingen te verkrijgen nemen we aan dat de steekproefuitkomsten hierboven overeenkomen met de bijbehorende populatiegrootheden $\mathrm{E}[X]$, $\mathrm{Var}[X]$ en $\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^3]$.
   Wat moet er in onderstaand script op de puntjes worden ingevuld om als resultaat de gevraagde kans te krijgen?
   Wat is het resultaat van het aanroepen van de R-functies `dgamma`, `pgamma`, `qgamma` respectievelijk `rgamma`?
   Welk van deze vier hebt u dus nodig in de laatste regel?

```
mu <- ...; sigma <- ...; gam <- ...
alpha <- ...; beta <- ...; x0 <- ...; y <- ...
1 - ...gamma(y, shape=alpha, rate=beta)
```

   (c) Hoe kan met R de stop-loss premie in retentie 130% worden benaderd (zie Opgave 2)?

▷ (a) Uit de gegeven cumulanten halen we $\widehat{\mu} = 96.5$, $\widehat{\sigma}^2 = 101$.
We zoeken $1 - \Phi\big(120;\ \mu = 96.5, \sigma = \sqrt{101}\big) = 1 - \Phi\big(\frac{23.5}{\sqrt{101}}\big) = 1 - \Phi(2.338) = 0.01$.

In de recente historie is het blijkbaar $2\times$ voorgekomen dat er een loss ratio van meer dan $120\%$ was.

(b) Gebruik $\mu = 96.5$, $\sigma^2 = 101$ en $\gamma = 790/101^{3/2} = 0.7782964$.
Dan volgt $\alpha = 4/\gamma^2$ enz. als onderaan Table C.
Doe dan bijvoorbeeld het volgende:

```
mu <- k1; sig <- sqrt(k2); gam <- k3/k2^1.5
alpha <- 4/gam^2; beta <- 2/gam/sig; x0 <- mu - 2*sig/gam; y <- 130-x0
1 - pgamma(y, shape=alpha, rate=beta) ## 0.004659182
```

`dgamma`, `pgamma`, `qgamma` en `rgamma` geven respectievelijk dichtheid, vdf, quantielen en random trekkingen uit de gamma verdeling. We moeten dus `pgamma` hebben.

(c) Doe bijvoorbeeld

```
alpha/beta * (1 - pgamma(y, shape=alpha+1, rate=beta)) -
   y * (1 - pgamma(y, shape=alpha, rate=beta)) ## 0.02657792
```

4. Gegeven is een compound Poisson stochast $S = X_1 + \cdots + X_N$ met $\Pr[X = 0] = \Pr[X = 1] = \Pr[X = 3] = \frac{1}{3}$.
   (a) Als verder $\mathrm{E}[N] = \lambda = 3$, gebruik dan Panjers recursiebetrekking $f(s) = \frac{1}{s}\sum_{h=1}^{s} \lambda h p(h) f(s-h)$ om de kans $f(3)$ te berekenen.
   (b) Als $\mathrm{E}[N] = \lambda = 3000$ geldt, geef dan een indicatie van het aantal vermenigvuldigingen benodigd om met Panjers recursie $f(t)$ te berekenen, met $t = \lceil \mathrm{E}[S] + 7\sqrt{\mathrm{Var}[S]}\rceil$.

▷ (a) $f(0) = \mathrm{e}^{-\lambda(1-p(0))} = \mathrm{e}^{-2}$.
$f(1) = f(0)$; $f(2) = \cdots = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2}$; $f(3) = \cdots = \frac{7}{6}\,\mathrm{e}^{-2}$.

(b) De eenvoudigste formule voor Panjers recursie is hier
$f(s) = \frac{\lambda}{s}\big(\frac{1}{3}f(s-1) + \frac{3}{3}f(s-3)\big) = \frac{1000}{s}\big(f(s-1) + 3f(s-3)\big)$.
Voor elke $s$ vergt dit 3 vermenigvuldigingen/delingen (plus 1 optelling).
Dit moet gedaan worden voor $s = 1, \ldots, t$, met $t = \lceil \mathrm{E}[S] + 7\sqrt{\mathrm{Var}[S]}\rceil$.
$\mathrm{E}[S] = \lambda\,\mathrm{E}[X] = 3000 \times \big(\frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 3\big) = 4000$;
$\mathrm{Var}[S] = \lambda\,\mathrm{E}[X^2] = 3000 \times \big(\frac{1}{3} \times 0^2 + \frac{1}{3} \times 1^2 + \frac{1}{3} \times 3^2\big) = 10000$.
Dus $t = 4700$.
Er zijn dus ongeveer $4700 \times 3 = 14100$ vermenigvuldigingen/delingen nodig.

5. Veronderstel dat voor een compound Poisson risicoproces bekend is dat de afzonderlijke schades $X_i \sim X$ als dichtheid $f(x) = \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-3x} + \frac{48}{9}\,\mathrm{e}^{-6x}$ $(x > 0)$ hebben.
   Voor de ruïnekans $\psi(u)$ bij dit proces is bekend $\int_0^\infty \mathrm{e}^{ru}(-\psi'(u))\,\mathrm{d}u \overset{*}{=} \frac{4}{9}\frac{10-3r}{(r-2)(r-4)}$ $(r < 2)$.
   (a) Laat zien dat $f(x)$ een mengsel van exponentiële verdelingen is.
   Bepaal de bij dit ruïneproces behorende veiligheidsopslag $\theta$ door $r = 0$ te substitueren in bovenstaande relatie $*$.
   (b) Leid een exacte uitdrukking af voor de ruïnekans $\psi(u)$ voor dit proces bij beginkapitaal $u \geq 0$.

▷ (a) Schrijf $f(x) = \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-3x} + \frac{48}{9}\,\mathrm{e}^{-6x} = \frac{1}{9}3\,\mathrm{e}^{-3x} + \frac{8}{9}6\,\mathrm{e}^{-6x}$, dan ontstaat een mengsel van exponentiële verdelingen met $q = \frac{1}{9}$, $\alpha = 3$ en $\beta = 6$.

Substitueert men $r = 0$ in het linkerlid van $*$ dan staat er $\int_0^\infty (-\psi'(u))\,\mathrm{d}u = -\psi(u)\Big|_0^\infty = \psi(0)$ .

In het rechterlid staat $\frac{5}{9}$.
Omdat algemeen geldt (wordt bewezen in Schade act 2) dat $\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$, geldt blijkbaar $\theta = 0.8$.

(b) $\in$ Schade act 2