Tentamen Schade Actuariaat 1 18/01/2008

Weging: elke opgave en elk onderdeel met aparte letter *(a), (b), … telt voor 1 punt.*

1. Laat zien dat als risico W cdf F heeft, dan $\mathrm{E}[W^2] = \int_0^\infty x^2 \,\mathrm{d}F(x) = \int_0^\infty 2x[1-F(x)]\,\mathrm{d}x$.

   Gebruik hiertoe ofwel partiële integratie, ofwel Fubini: schrijf $x^2 = \int_0^x 2y\,\mathrm{d}y$ en verwissel de integratievolgorde.

   ▷ Met Fubini:
   $\int_0^\infty x^2\,\mathrm{d}F(x) = \int_0^\infty \int_0^x 2y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}F(x) = \int_0^\infty 2y \int_y^\infty \mathrm{d}F(x)\,\mathrm{d}y = \nwarrow$
   De herhaalde integralen zijn over die (x,y) waarvoor $0<y<x<\infty$.

   Of met partiële integratie:
   $\int_0^\infty x^2\,\mathrm{d}F(x) = x^2 \underbrace{[F(x)-1]}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty 2x[1-F(x)]\,\mathrm{d}x = \nwarrow$

   Neem als primitieve bij P.I. niet $F(x)$, maar $F(x)-1$, omdat alleen dan de geïntegreerde term verdwijnen kan.

   Het is niet triviaal om te bewijzen dat dit inderdaad gebeurt; het wordt als volgt bewezen:
   $x^2[1-F(x)] = x^2\int_x^\infty \mathrm{d}F(y) \le \int_x^\infty y^2\,\mathrm{d}F(y) \to 0$ voor $x\to\infty$,
   als tenminste de integraal convergeert.

2. Gegeven is een compound Poisson stochast $S = X_1+\dots+X_N$ met $\Pr[X_i=1] = \Pr[X_i=2] = \frac14$ en $\Pr[X_i=0]=\frac12$.

   (a) Als verder $\mathrm{E}[N]=\lambda=4$, gebruik dan Panjers recursierelatie $f(s) = \frac1s\sum_{h=1}^s \lambda h p(h) f(s-h)$ om de kans $\Pr[S\le 3]$ te berekenen.

   (b) Als $\mathrm{E}[N]=\lambda=10$ geldt, bepaal dan met een op 3 momenten gebaseerde benadering de kans dat $S > \mathrm{E}[S] + 2\sqrt{\mathrm{Var}[S]}$.

   ▷ (a) Startwaarde: $f(0) = \exp(-\lambda(1-p_0)) = \mathrm{e}^{-2}$.
   $f(s) = \frac1s\sum_{h=1}^s \lambda h p(h) f(s-h) = \frac1s\big(f(s-1)+2f(s-2)\big)$
   $f(1) = \mathrm{e}^{-2}$;
   $f(2) = \frac12\big(f(1)+2f(0)\big) = \frac32 f(0)$;
   $f(3) = \dots = \frac76\,\mathrm{e}^{-2}$,
   dus $F(3) = 4\frac23\,\mathrm{e}^{-2} = 0.631564655$.

   (b) Verschoven gamma komt niet in aanmerking omdat die het berekenen van de gamma-vdf vergt. NP dus maar.
   Momenten van X: $\mathrm{E}[X]=\frac34$, $\mathrm{E}[X^2]=\frac54$, $\mathrm{E}[X^3] = \frac14(1^3+2^3) = \frac94$.
   Dus cumulanten van S: $\mathrm{E}[S] = \lambda\,\mathrm{E}[X] = 7.5$, $\mathrm{Var}[S] = \lambda\,\mathrm{E}[X^2] = 12.5$, $\kappa_3[S] = \lambda\,\mathrm{E}[X^3] = 22.5$.
   Dus scheefheid van S: $\gamma_S = 22.5/12.5^{3/2} = 0.509$, en
   $\Pr\left[\frac{S-\mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}} > 2\right] \approx 1-\Phi\big(\sqrt{9/\gamma_S^2 + 6\times 2/\gamma_S + 1} - 3/\gamma_S\big)$.

Dit komt neer op $1 - \Phi(1.8076)$. Interpoleer met behulp van Table B tussen $\Phi(1.80) = \Phi(1.75 + 0.05) = 0.964$ en $\Phi(1.85) = 0.968$, dan krijg je

$0.964 + 0.0076/0.05 \times (0.968 - 0.964)) \approx 0.9646$.

Dus de gevraagde kans is ongeveer 3.5%.

3. Bezie functies van de vorm $p(x) = q\alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha x} + (1-q)\beta\,\mathrm{e}^{-\beta x}$, $x > 0$, en $p(x) = 0$ elders.

   (a) Laat zien dat $p(x)$ een kansdichtheid is als geldt $0 < \alpha < \beta$ en $0 \le q \le \frac{\beta}{\beta-\alpha}$.

   (b) Leg uit waarom het volgende stukje R pseudo-random trekkingen uit de dichtheid $p(x)$ oplevert, en bepaal de parameters daarvan:

```
set.seed(180108); n <- 1000
pp <- (runif(n)<0.5) * rexp(n) + rexp(n)/3
```

▷ (a) We moeten bewijzen dat $\int p(x)\,\mathrm{d}x = 1$ en $p(x) \ge 0\ \ \forall x > 0$.

Het eerste is triviaal.

Als geldt $0 < \alpha < \beta$ en $0 \le q \le \frac{\beta}{\beta-\alpha}$, dan

$p(0) = q\alpha + (1-q)\beta = \beta - (\beta-\alpha)q \ge 0$ en

$p(x) \ge q\alpha\,\mathrm{e}^{-\underline{\beta} x} + (1-q)\beta\,\mathrm{e}^{-\beta x} = \mathrm{e}^{-\beta x}\,p(0)$.

(b) De eerste regel initialiseert de random generator en zet het aantal trekkingen op 1000.

De tweede regel heeft de volgende elementen:

`rexp(n)` doet 1000 trekkingen uit een standaard exponentiële verdeling (met verwachting 1).

`rexp(n)/3` geeft dus trekkingen uit een exponentieel(3) verdeling.

`runif(n) < 0.5` maakt een vector ter lengte 1000 met `TRUE` en `FALSE` elk met kans 0.5.

Vermenigvuldigen hiervan (`TRUE` wordt dan genomen als 1, `FALSE` als 0) et de vector resulterend uit `rexp(n)` geeft dan trekkingen uit IX met $I \sim$ Bernoulli($\frac{1}{2}$) en $X \sim$ exponentieel(1).

In de 1000 elementen van `pp` komt dus te staan het resultaat van een trekking uit $Z := IX + Y/3$ met I, X en Y onafhankelijk, en $X, Y \sim$ exponentieel(1).

De mgf bij Z is $\mathrm{m}_Z(t) = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{t(IX+Y/3)}] = \mathrm{E}[\mathrm{E}[\mathrm{e}^{tIX}\,|I]]\,\mathrm{E}[\mathrm{e}^{tY/3}]$.

Gegeven $I = 1$ geldt $IX \sim$ exponentieel(1); als $I = 0$, dan $IX \equiv 0$.

Dus $\mathrm{m}_Z(t) = \frac{1}{2}\big(\frac{1}{1-t} + 1\big) \times \frac{1}{1-t/3} = \frac{1}{2}\frac{2-t}{1-t} \times \frac{3}{3-t} = \frac{\frac{3}{2}(2-t)}{(1-t)(3-t)}$.

Dit is gelijk aan de mgf bij $p(x)$, dwz $q\frac{\alpha}{\alpha-t} + (1-q)\frac{\beta}{\beta-t}$, als we nemen $\alpha = 1$ en $\beta = 3$, en verder q zo nemen dat

$q\frac{\alpha}{\alpha-t} + (1-q)\frac{\beta}{\beta-t} = \frac{q\alpha(\beta-t)+(1-q)\beta(\alpha-t)}{(\alpha-t)(\beta-t)} = \frac{\frac{3}{2}(2-t)}{(1-t)(3-t)}$.

De waarden van α en β invullen en daarna de coëfficiënten van $-t$ in de tellers gelijkstellen leidt tot $q + 3(1-q) = \frac{3}{2}$, dus $q = \frac{3}{4}$.

4. Voor een compound Poisson ruïneproces wordt de ruïnekans gegeven door $\psi(u) = \alpha\,\mathrm{e}^{-u}$, $u \ge 0$.

   (a) Wat is de *safety loading* θ in dit proces, als functie van α?

(b) Bepaal de *adjustment coefficient* R, dus de wortel van

$$1 + (1+\theta)\mu_1 r - \mathrm{m}_X(r) = 0.$$

Gebruik eventueel de volgende gelijkheid:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{ru}(-\psi'(u))\,\mathrm{d}u = \frac{1}{1+\theta}\frac{\theta(\mathrm{m}_X(r)-1)}{1+(1+\theta)\mu_1 r - \mathrm{m}_X(r)}.$$

▷ (a) We weten dat voor compound Poisson ruïneprocessen met exponentiële schadehoogten geldt $\psi(u) = \psi(0)\,\mathrm{e}^{-Ru}$.

Ook weten we dat $\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$, dus $\theta = \frac{1}{\alpha} - 1$.

(b) De gegeven gelijkheid wordt pas bewezen in Schade actuariaat 2.

Maar het is wel duidelijk dat voor $r \uparrow R$, het rechterlid ervan naar oneindig gaat; dat moet dus ook gelden voor het linkerlid.

Het linkerlid is $\int_0^\infty \mathrm{e}^{ru}(-\psi'(u))\,\mathrm{d}u = \alpha\int_0^\infty \mathrm{e}^{ru}\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{\alpha}{1-r}$, $r < 1$.

Dat gaat naar oneindig als $r \to 1$.

Dus $R = 1$.

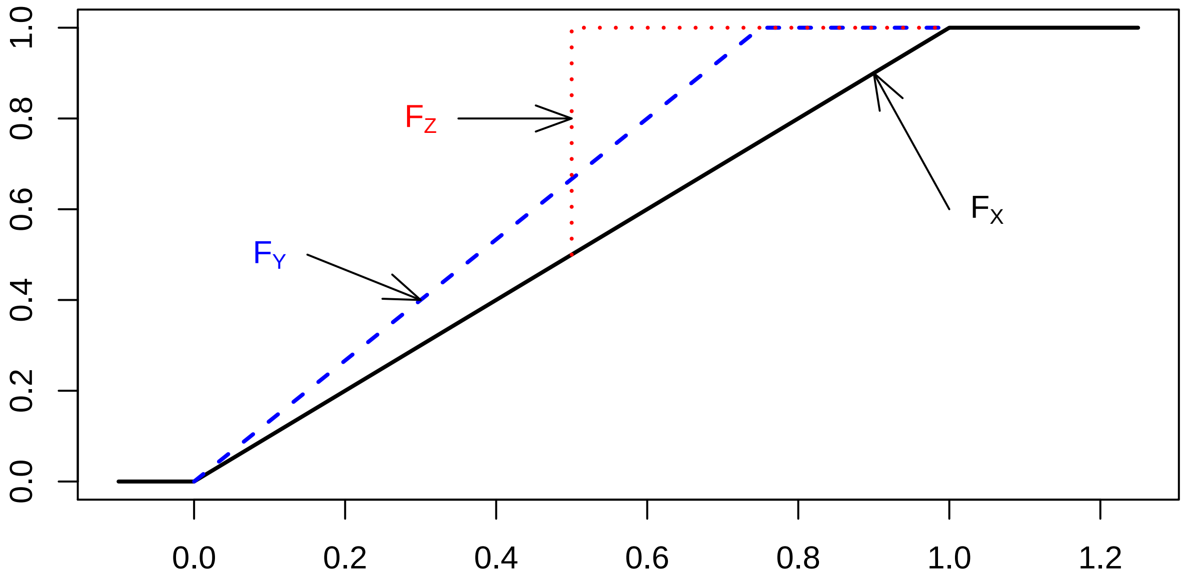
5. Neem aan dat de schade X die een verzekeraar gaat lijden uniform$(0,1)$ verdeeld is. Neem verder aan dat er twee mogelijke herverzekeringen bekeken worden, met uitkeringen $U = \frac{1}{4}X$ en $V = (X-d)_+$. De schades-eigen-rekening na herverzekering zijn respectievelijk $Y = X - U$ en $Z = X - V$. De retentie d is zodanig dat $\mathrm{E}[U] = \mathrm{E}[V]$ geldt.

   (a) Laat zien dat $d = \frac{1}{2}$. Teken de cdfs van X, Y en Z in één figuur.

   (b) Laat zien dat $\mathrm{Var}[Y] > \mathrm{Var}[Z]$. Gebruik bijvoorbeeld de in Opgave 1 bewezen gelijkheid, $\mathrm{E}[Y] = \int_0^\infty [1 - F_Y(y)]\,\mathrm{d}y$ en het teken van $(x-d)[F_Z(x) - F_Y(x)]$.

▷ (a) $\mathrm{E}[U] = \frac{1}{8}$ en $\mathrm{E}[V] = \int_d^1 (x-d)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(1-d)^2 \Longrightarrow d = \frac{1}{2}$.

Er geldt $Y \equiv \frac{3}{4}X \sim$ uniform$(0, \frac{3}{4})$ en $Z = d$ als $X > d$, $Z = X$ anders.



(b) $\mathrm{E}[Y^2] - \mathrm{E}[Z^2] = \int_0^\infty 2x[F_Z(x) - F_Y(x)]\,\mathrm{d}x$ wegens opg. 1).
Dit is gelijk aan $\int_0^\infty 2(x-d)[F_Z(x) - F_Y(x)]\,\mathrm{d}x$ omdat
$d\big(\int_0^\infty [1 - F_Y(x)]\,\mathrm{d}x - \int_0^\infty [1 - F_Z(x)]\,\mathrm{d}x\big) = d(\mathrm{E}[Y] - \mathrm{E}[Z]) = 0$.
En uit de figuur uit (a) blijkt dat $(x - \frac{1}{2})[F_Z(x) - F_Y(x)] \geq 0 \;\; \forall x$ geldt.

6. We hebben een steekproef $Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n$ ter grootte n uit een exponentieel(β) verdeling. Stel de loglikelihood op, en bepaal de meest aannemelijke schatting voor β door de afgeleide ervan te nemen en deze nul te stellen.

▷ De loglikelihood is
$\ell(\beta; \vec{y}) = \log \prod f_Y(y_i; \beta) = \log \prod \beta\,\mathrm{e}^{-\beta y_i} = n \log \beta - \beta \sum y_i$.
De afgeleide hiervan naar β is $\frac{n}{\beta} - \sum y_i$.
Dit nulstellen geeft $\beta = \frac{n}{\sum y_i} = \frac{1}{\bar{y}}$, dus de meest aannemelijke schatter voor β is $\widehat{\beta} = \frac{1}{\bar{Y}}$.