Tentamen Schade Actuariaat 1 — 20/06/2008

Weging: elke opgave en elk onderdeel met aparte letter *(a), (b), …* *telt voor* $1\frac{1}{4}$ *punt.*

1. Beschouw de volgende functie $u(w) = w(1-\alpha w)$. Voor welke w kan deze functie worden gebruikt als nutsfunctie? Is deze nutsfunctie dan *risico-avers*?

   ▷ Er geldt $u(w) = w - \alpha w^2$, dus $u'(w) = 1 - 2\alpha w$ en $u''(w) = -2\alpha$.

   Een nutsfunctie moet, om de realiteit goed weer te geven, in elk geval niet-dalend zijn, en om de preferenties tussen risico's van een risico-averse beslisser weer te geven, ook concaaf.

   Als $\alpha > 0$ is $u(w)$ stijgend en concaaf op het interval $w \in (-\infty, \frac{1}{2\alpha})$.

   Als $\alpha = 0$ komt $u(w)$ neer op lineair nut.

   Als $\alpha < 0$ is $u(w)$ stijgend op $w \in (\frac{1}{2\alpha}, \infty)$, maar niet concaaf.

2. Gegeven is een compound Poisson stochast $S = X_1 + \cdots + X_N$ met $\Pr[X_i = 1] = \Pr[X_i = 2] = \frac{1}{2}$.

   (a) Als verder $\mathrm{E}[N] = \lambda = 5$, gebruik dan Panjers recursierelatie $f(s) = \frac{1}{s}\sum_{h=1}^{s} \lambda h p(h) f(s-h)$ om de kans $\Pr[S \leq 2.5]$ te berekenen.

   (b) Als $\mathrm{E}[N] = \lambda = 12$ geldt, bepaal dan met een op 3 momenten gebaseerde benadering de kans dat $S > \mathrm{E}[S] + 2.5\sqrt{\mathrm{Var}[S]}$.

   ▷ (a) Er geldt $p(1) = p(2) = 0.5$, $f(0) = \mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-5}$, en

   $f(s) = \frac{1}{s}\sum_{h=1}^{s} \lambda h p(h) f(s-h) = \frac{1}{s}\big(2.5f(s-1) + 5f(s-2)\big)$.

   Dan $f(1) = 2.5f(0)$, $f(2) = \cdots = \frac{45}{8}f(0)$.

   Dus $\Pr[S \leq 2.5] = \Pr[S \leq 2] = \cdots = \frac{73}{8}\,\mathrm{e}^{-5} = 0.0615$.

   N.B. De vdf is een tredefunctie: niet interpoleren dus.

   (b) $\mathrm{E}[S] = \lambda\,\mathrm{E}[X] = 12(1+2)/2 = 18$;

   $\mathrm{Var}[S] = \lambda\,\mathrm{E}[X^2] = 12(1^2 + 2^2)/2 = 30$;

   $\kappa_3[S] = \lambda\,\mathrm{E}[X^3] = 12(1^3 + 2^3)/2 = 54$,

   dus $\gamma_S = \frac{54}{30\sqrt{30}} = 0.3286335$.

   $\Pr\left[\frac{S-\mathrm{E}[S]}{\sigma_S} > 2.5\right] \approx 1 - \Phi\big(\sqrt{9/\gamma_S^2 + 6 \times 2.5/\gamma_S + 1} - 3/\gamma_S\big)$

   $= 1 - \Phi(2.272) = 0.01154$.

3. Gegeven is een verzekeringsportefeuille met n onafhankelijke polissen. De op grond van polis $i = 1, 2, \ldots, n$ ingediende claims in een jaar bedragen X_i. Dit zijn identiek verdeelde stochasten met $\Pr[X_i = 0] = 0.92$, $\Pr[X_i = 1 \,|\, X_i \neq 0] = 0.75$ en $\Pr[X_i = 2 \,|\, X_i \neq 0] = 0.25$. De totaal uitbetaalde schade is dus $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Deze is opgebouwd uit N_1 betalingen ter grootte 1 en N_2 ter grootte 2, zodat $S = N_1 + 2N_2$. We benaderen S door $T = M_1 + 2M_2$, waarbij de M_i onafhankelijke Poisson stochasten zijn met $\mathrm{E}[M_i] = \mathrm{E}[N_i]$, $i = 1, 2$.

   (a) Wat zijn de marginale kansverdelingen van N_1 en N_2? Wat is de kansverdeling van $N_1 + N_2$? Laat zien dat N_1 en N_2 niet onafhankelijk zijn door aan te tonen dat $\Pr[N_1 = 0, N_2 = 0] \neq \Pr[N_1 = 0] \times \Pr[N_1 = 0]$.

(b) De stochast T is een compound Poisson stochast. Laat dit zien door de mgf van T uit te rekenen. Wat zijn de specificaties van T als compound Poisson stochast?

▷ (a) $N_1 \sim$ binomiaal$(n, 0.75 \times 0.08)$ en $N_2 \sim$ binomiaal$(n, 0.02)$.

$N_1 + N_2$ is het totaal aantal polissen dat claimt, en dus $N_1 + N_2 \sim$ binomiaal$(n, 0.08)$.

$\Pr[N_1 = 0] = 0.94^n$; $\Pr[N_2 = 0] = 0.98^n$;

$\Pr[N_1 = 0 \cap N_2 = 0] = \Pr[N_1 + N_2 = 0] = 0.92^n$.

En $0.98^n \times 0.94^n \neq 0.92^n$ want $0.98 \times 0.94 = 0.9212$.

(b) Er geldt $\mathrm{m}_T(t) = \mathrm{m}_{M_1+2M_2}(t) = \mathrm{m}_{M_1}(t)\,\mathrm{m}_{2M_2}(t)$

$= \mathrm{m}_{M_1}(t)\,\mathrm{m}_{M_2}(2t)$

$= \exp\big(0.06n(\mathrm{e}^t - 1)\big)\exp\big(0.02n(\mathrm{e}^{2t} - 1)\big) =$

$= \exp\big(0.08n(\frac{3}{4}\,\mathrm{e}^t + \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2t} - 1)\big)$,

dus $T \sim$ compound Poisson$(0.08n; p(1) = \frac{3}{4}, p(2) = \frac{1}{4})$.

4. Bezie het volgende stukje R-output, waarbij `rev` een vector omkeert, dus $(q_0, \dots, q_{m-1})$ omzet in $(q_{m-1}, \dots, q_0)$, en `cumsum` de cumulatieve sommen $(q_0, q_0 + q_1, \dots, q_0 + q_1 + \dots + q_{m-1})$ oplevert:

```
slps <- function (p) rev(cumsum(rev(1-cumsum(p))))
round(slps(dpois(0:3, .1)), 5)
```

Ervan uitgaande dat voor $S \sim$ Poisson(0.1) geldt $\Pr[S > 3] = 0$, toon aan dat de resulterende getallen inderdaad de stop-loss premies zijn bij de Poisson(0.1) verdeling.
Maak eventueel gebruik van de relatie $\mathrm{E}[(S-d)_+] = \sum_{x=d}^{\infty}[1 - F_S(x)]$.

▷ Zij $q_j = \Pr[X = j]$ voor $X \sim$ Poisson(0.1).

We mogen gebruiken dat $q_0 + q_1 + q_2 + q_3 \doteq 1$.

Begin met `p` $= (q_0, q_1, q_2, q_3)$, dan achtereenvolgens:

`cumsum(p)` $= (q_0, q_0 + q_1, q_0 + q_1 + q_2, q_0 + q_1 + q_2 + q_3)$,

`1-cumsum(p)` $\doteq (q_1 + q_2 + q_3, q_2 + q_3, q_3, 0)$,

`rev(1-cumsum(p))` $\doteq (0, q_3, q_2 + q_3, q_1 + q_2 + q_3)$,

`cumsum(rev(1-cumsum(p)))` $\doteq (0, q_3, q_2 + 2q_3, q_1 + 2q_2 + 3q_3)$, en

`rev(cumsum(rev(1-cumsum(p))))` $\doteq (q_1 + 2q_2 + 3q_3, q_2 + 2q_3, q_3, 0)$

$= (\mathrm{E}[(X-0)_+], \mathrm{E}[(X-1)_+], \mathrm{E}[(X-2)_+], \mathrm{E}[(X-3)_+])$.

5. Veronderstel dat voor een compound Poisson risicoproces bekend is dat het verwachte aantal schades per jaar gelijk is aan 1; de schadebedragen $X_i \sim X$ hebben dichtheid $f_X(x) = \frac{1}{9}\,3\,\mathrm{e}^{-3x} + \frac{8}{9}\,6\,\mathrm{e}^{-6x}$, $x > 0$. Verder is bekend dat de *adjustment coefficient* R, dat wil zeggen de oplossing in $(0, \infty)$ van de vergelijking $1 + (1+\theta)\,\mathrm{E}[X]r = \mathrm{m}_X(r)$, gelijk is aan 2.

(a) Bepaal welke veiligheidsopslag θ op de premie wordt gehanteerd.

(b) Leid een exacte uitdrukking af voor de ruïnekans $\psi(u)$ voor dit proces bij beginkapitaal $u \geq 0$. Gebruik hierbij de volgende gelijkheid, die u niet hoeft te bewijzen:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{ru}(-\psi'(u))\,\mathrm{d}u = \frac{4}{9}\,\frac{10-3r}{(r-2)(r-4)}, \qquad r < 2.$$

Verifieer of de door u gevonden waarde voor $\psi(0)$ klopt.

$\triangleright$ (a) We hebben $\mathrm{E}[X] = \frac{1}{9} \times \frac{1}{3} + \frac{8}{9} \times \frac{1}{6} = \frac{10}{54}$.
Verder $\mathrm{m}_X(r) = \frac{1}{9}\frac{3}{3-r} + \frac{8}{9}\frac{6}{6-r}$.
Uit $1 + (1+\theta)\,\mathrm{E}[X]R = \mathrm{m}_X(R)$ met $R = 2$ volgt dan $\theta = 0.8$.

(b) Hoort louter bij Schade actuariaat 2.