Tentamen Schade actuariaat 1 — 23/01/04

Motiveer uw antwoorden met een korte toelichting. Zie ook de bijgeleverde tabellen.

Waardering: in principe elk onderdeel even zwaar. Uitslag allereerst op Blackboard.

Zoals aangekondigd op de Blackboardsite van dit college is de stof met ingang van dit collegejaar gewijzigd. Dit tentamen gaat over de nieuwe stof, d.w.z. H.1 t/m H.4 uit Modern A.R.T., en niet meer over H.5 en H.6 die naar Schade actuariaat 2 verhuisd zijn.

1. De $2n$ medewerkers van een bepaald bedrijf kunnen een beroep doen op een bepaalde verzekering. De helft heeft 1 als verzekerd bedrag, de andere helft 2. De claimkans per jaar voor beide is 1%, en alle claims zijn stochastisch onafhankelijk. Schrijf S voor het totaal aan claims.

a) Voor $n = 1000$, bepaal met de NP-benadering het getal s waarvoor geldt $P[S>s] \approx 5\%$.

b) Idem voor $n = 50$, maar nu door S te benaderen met een *collectief* model en gebruik te maken van Panjer's recursiebetrekking $f(s) = \frac{1}{s}\sum_{h=1}^{s} \lambda h \cdot p(h) \cdot f(s-h),\ s = 1,2,...$

2. In een bepaald Poisson ruïneproces geldt $c = \lambda$ (c is de premie per jaar, λ het verwachte aantal claims). De individuele schades X_i ontstaan als $X_i = Y_i/4 + Z_i/3$, waarbij Y_i, Z_i onafhankelijke exponentieel(1) stochasten zijn.

a) Laat zien dat de schades X_i een mengsel/combinatie van exponentiële verdelingen vormen, en bepaal de dichtheid.

b) De volgende relatie wordt bekend verondersteld:

$$\int_0^\infty e^{ru}(-\psi'(u))\mathrm{d}u = \frac{1}{1+\theta}\,\frac{\theta(m_X(r)-1)}{1+(1+\theta)\mu_1 r - m_X(r)}. \qquad (*)$$

Verifieer dat als de diverse gegevens op de juiste wijze zijn ingevuld, het rechterlid van (*) overgaat in

$$\frac{5}{8}\,\frac{1}{1-r} - \frac{1}{24}\,\frac{5}{5-r}.$$

c) Bepaal de adjustment coefficient R voor deze situatie, i.e., de positieve wortel van de noemer van (*).

d) Bepaal $\psi(u)$ met behulp van (*).

e) Welke bekende gelijkheid ontstaat als we in (*) in het linkerlid $r = 0$ invullen en in het rechterlid de limiet nemen voor $r \to 0$? (NB Gedenk l'Hopital, of ontwikkel de mgf $m_X(r)$ in een reeksje.)

3. De absolute risicoaversiecoëfficiënt bij kapitaal x en nutsfunctie $u(\cdot)$ is gedefinieerd als $r(x) = -u''(x)/u'(x)$. Laat zien dat voor de zero-utility premie geldt $\pi[X] = \mu + ½\ \sigma^2\ r(w)$ ingeval $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ en $u(\cdot)$ exponentieel.

4a) Laat zien dat als $S = X_1 + ... + X_N$ een compound stochast is, er geldt $\kappa_S(t) = \kappa_N(\kappa_X(t))$, waarbij $X_i \sim X$ en $\kappa_V(t) = \ln(m_V(t))$ staat voor de cumulanten genererende functie van stochast V.

b) Als $N \sim$ geometrisch(p) en $X_i \sim$ exponentieel(1), laat dan zien dat de verdelingfunctie van $S = X_1 + ... + X_N$ te schrijven valt als een mengsel van een exponentiële verdeling en de verdeling van de stochast die met kans 1 gelijk is aan 0.

Tentamen Schade actuariaat 1

Motiveer uw antwoorden met een korte toelichting. Zie ook de bijgeleverde tabellen.
Waardering: in principe elk onderdeel even zwaar. Uitslag allereerst op Blackboard.

5. Laat $N \sim$ geometrisch(p) en $X_i \sim$ exponentieel(1), $i = 1, 2, ...,$ onafhankelijke stochasten zijn.

a) Laat zien dat de momenten genererende functie bij $S = X_1 + X_2 + ... + X_N$ te schrijven valt als een mengsel van die bij een exponentiële verdeling en die bij een stochast die met kans 1 de waarde 0 aanneemt.

b) Geef ook een eenvoudige uitdrukking voor de verdelingsfunctie van S.

6. Van een klassiek ruïneproces zijn de momenten van de schadebedragen $E[(X_i)^j] = \mu_j$, $j = 1, 2, ...$ Leid hiermee een bovengrens af voor de *adjustment coefficient* R (zie ook Opg. 4b).)

7. Van een compound Poisson verdeelde stochast S met aantalparameter λ en schades X verdeeld volgens $p(\cdot)$ is bekend dat $p(1) = p(2) = ½$, en $f_S(0) = f_S(1)$. Bepaal $E[(3-S)_+]$. Mocht u Panjers recursieformule willen gebruiken, deze luidt $f_S(s) = \frac{1}{s}\sum_{h=1}^{s} \lambda h \cdot p(h) \cdot f_S(s-h)$, $s = 1,2,...$

8. In een compound Poisson risicomodel geldt $\theta = 0.8$, en de dichtheid van de schadegrootten X is $p(x) = (1+6x)e^{-3x}$, $x > 0$.

a) Laat zien dat $p(x)$ een mengsel is van een exp(3) dichtheid (met coëfficiënt ⅓) en een gamma(2,3) dichtheid. Bepaal met behulp hiervan $\mu_1 = E[X]$ en $m_X(r)$.

b) Laat zien dat $1 + (1+\theta)\mu_1 r - m_X(r) = r(r-1)(r-4)/(r-3)^2$, $r < 3$.
Bepaal hiermee de adjustment coefficient R.

c) Vind $\psi(u)$ met behulp van de relatie (bewijs wordt niet gevraagd):

$$\int_0^\infty e^{ru}(-\psi'(u))du = \frac{1}{1+\theta}\frac{\theta(m_X(r)-1)}{1+(1+\theta)\mu_1 r - m_X(r)}. \qquad (*)$$

Verifieer hiertoe dat als de diverse gegevens op de juiste wijze zijn ingevuld, het rechterlid van (*) overgaat in

$$\frac{16}{27}\frac{1}{1-r} - \frac{1}{27}\frac{4}{4-r}.$$

9. Stel stochast X heeft een χ^2 verdeling met parameter (aantal vrijheidsgraden) 50.

a) Welk van beide benaderingen de NP-benadering en de verschoven Gamma benadering om de kans $Pr[X>80]$ te benaderen is de beste?

b) Benader deze kans met een van deze twee methoden.