UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM

Amsterdam School of Economics

Tentamen Schade Actuariaat 2 **26/06/2007, 9.30-12.30 u., A/A**

Weging: elke opgave c.q. elk onderdeel met aparte letter telt even zwaar mee in het eindcijfer.

1. Laat $N \sim$ Bernoulli($\frac{1}{2}$) en $M \sim$ Binomiaal$(3, p)$.
   (a) Bepaal alle waarden van p zodanig dat $N \leq_{\text{SL}} M$.
   (b) Idem, zodat $N \leq_{\text{st}} M$.

2. Zij X het verlies dat een beslisser met een concave nutsfunctie $u(\cdot)$ gaat lijden. Dit kan op twee manieren door herverzekering worden afgedekt.
   - Bij stop-loss herverzekering met eigen behoud d ontstaat Z als schade-eigen-rekening.
   - De stochast Y is de schade-eigen-rekening als de herverzekeraar $0.2X$ betaalt indien $X < t$ geldt, en $(X - t)_+$ als $X > t$.

   Gegeven is dat d en t zodanig gekozen zijn dat er geldt $\mathrm{E}[Z] = \mathrm{E}[Y]$.
   Welke van deze twee herverzekeringsvormen zal de beslisser prefereren? Motiveer waarom.

3. Gegeven is voor de differentiaal bij de vdf F van X: $\mathrm{d}F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{d}x & \text{als } 1 < x < 3, \\ \frac{1}{4} & \text{als } x = 1 \text{ of } x = 4. \end{cases}$
   (a) Schets de verdelingsfunctie $F(x)$ en de stop-loss transformatie $\mathrm{E}[(X - d)_+]$.
   (b) Laat zien dat als N_1, N_2, N_3, N_4 onafhankelijke Poisson(1) stochasten zijn, en $S \sim$ compound Poisson is met gemiddeld 4 schades, verdeeld volgens F, dan geldt

   $$N_1 + N_2 + 3N_3 + 4N_4 \geq_{\text{SL}} S \geq_{\text{SL}} N_1 + 2(N_2 + N_3) + 4N_4.$$

4. Bezie de familie van Beta(a, b) verdelingen, met dichtheid $f(x; a, b) \propto x^{a-1}(1 - x)^{b-1}$, $0 < x < 1$, en $f(x; a, b) = 0$ elders. Het symbool $\propto$ betekent "op een constante (niet afhangend van x) na gelijk aan".
   (a) Laat zien dat $f(a, b)$ stochastisch stijgt in a voor vaste b.
   (b) De verwachting van een Beta(a, b) stochast is $\frac{a}{a+b}$, de variantie is $\frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$. Neem als gegeven aan dat twee Beta verdeelde stochasten met dezelfde verwachting stop-loss geordend zijn. Met deze gegevens, bepaal een zo groot mogelijke verzameling (a, b) waarvoor een Beta(a, b) verdeling stop-loss groter is dan de Uniform(0,1) verdeling.

5. De Tail-Value-at-Risk bij S op niveau p is gedefinieerd als $\mathrm{TVaR}[S; p] = \frac{1}{1-p} \int_p^1 F_S^{-1}(t)\mathrm{d}t$.
   Laat zien dat $\mathrm{TVaR}[S; p] \leq \max[S]$.
   Laat ook zien dat als $S \equiv c$, dan $\mathrm{TVaR}[S; p] = c$ voor elke p.

6. Veronderstel dat (X, Y) en (X', Y') twee paren stochasten zijn met dezelfde marginale verdelingen, maar mogelijk verschillende simultane verdeling. Toon aan dat als (X, Y) *meer samenhangt* dan (X', Y'), dan geldt $X + Y \geq_{\text{cx}} X' + Y'$. U mag hierbij uitgaan van de gelijkheid $\mathrm{E}[(d - X - Y)_+] = \int F_{X,Y}(t, d - t)\mathrm{d}t$ (bewijs hiervan wordt niet gevraagd).