Tentamen Schade Actuariaat 2 08/01/2008

1. Als voor de mgf's bij niet-negatieve stochasten X en Y geldt dat $\big(\mathrm{m}_X(t)\big)^3 = \mathrm{m}_Y(t)$ voor elke t, laat dan zien dat $X \leq_{\text{e}} Y$, $X \leq_{\text{SL}} Y$ en zelfs $X \leq_{\text{st}} Y$ geldt.

   ▹ Blijkbaar geldt $Y \sim X_1 + X_2 + X_3$ met X_i iid $\sim X$.

   Omdat $X \geq 0$ geldt dus ook $Y \geq_{\text{st}} X$, dus zeker ook $Y \geq_{\text{SL}} X$ en $Y \geq_{\text{e}} X$.

2. Laat $U \sim$ uniform$(0,3)$ en $M \sim$ Binomiaal$(3,p)$.

   (a) Laat dat $U \leq_{\text{SL}} M$ als $p = \frac{1}{2}$.
   Hint: schets de vdf's en laat zien dat die bij M *indirectly thicker-tailed* is.

   ▹ Laat $F_1 = F_M$, $F_4 = F_U$, en
   $$F_2 = \begin{cases} F_M \text{ op } (-\infty, 2] \\ F_U \text{ op } [2,\infty) \end{cases}, \; F_3 = \begin{cases} F_M \text{ op } (-\infty, 1] \\ F_U \text{ op } [1,\infty) \end{cases}.$$
   Dan geldt $F_1 \geq_{\text{tt}} F_2 \geq_{\text{tt}} F_3 \geq_{\text{tt}} F_4$, dus $U \leq_{\text{SL}} M$ als $p = 1/2$.

   (b) Geldt $U \leq_{\text{SL}} M$ ook als $p > \frac{1}{2}$? En als $0 < p < \frac{1}{2}$? Motiveer.

   ▹ Als $p > 1/2$ dan $M_p \geq_{\text{st}} M_{1/2} \geq_{\text{SL}} U$, dus $M_p \geq_{\text{SL}} U$.
   Als $0 < p < 1/2$ dan $\mathrm{E}[M_p] < \mathrm{E}[U]$ doch $\pi_{M_p}(3-0) > \pi_U(3-0)$, zodat noch $M_p \leq_{\text{SL}} U$, noch $M_p \geq_{\text{SL}} U$ geldt.

3. Zij X de totale claims die een verzekeraar moet uitbetalen. Vergelijk stop-loss herverzekering met eigen behoud d met een herverzekering met uitkering T waarvoor $0 \leq T \leq X$. Neem aan dat de schades-eigen-rekening $Z = X - (X-d)_+$ en $Y = X - T$ dezelfde verwachtingswaarde hebben. Als een beslisser Y prefereert boven Z, bij dezelfde premie, wat zegt dat dan over diens nutsfunctie?

   ▹ Uit een schets van de vdf's van X, Y en Z blijkt dat $F_Y \geq_{\text{tt}} F_Z$, dus $Z \leq_{\text{SL}} Y$.

   Dus als een beslisser Y verkiest is deze niet *risico-avers*, en heeft dus geen concaaf stijgende nutsfunctie.

4. Gegeven is de volgende vdf: $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{als } 0 < x < 1, \\ \frac{x+1}{4} & \text{als } 1 < x < 3. \end{cases}$

   (a) Schets de verdelingsfunctie $F(x)$ en de stop-loss transformatie $\pi_F(d) = \int_d^\infty [1 - F(x)]\,\mathrm{d}x$.

   (b) Bepaal (door concentratie resp. dispersie) verdelingsfuncties G en H bij geheeltallige stochasten waarvan voor de stop-loss premies geldt $\pi_G(d) = \pi_F(d) = \pi_H(d)$ voor elke $d \in \{0,1,3\}$ en tevens $\pi_G(d) \leq \pi_F(d) \leq \pi_H(d)$ voor elke $d \in (-\infty, \infty)$.

   ▹ Zie het plaatje op p. (256) bij opgave 7.3.6 over het effect van concentratie en dispersie; neem $a = 1$, $b = 3$, en concentreer op punt 2.

5. Bekijk de stochasten $X_{bq} = bI$ met $I \sim$ Bernoulli(q), $b > 0$ en $0 \leq q \leq 1$.

(a) Laat zien dat $X_{bq} \geq_{\text{st}} X_{1,\frac{1}{2}}$ als $b \geq 1$ en $q \geq \frac{1}{2}$.

▷ Er geldt $X_{b,q} \geq_1 X_{1,q} \geq_{\text{st}} X_{1,1/2}$ als $b \geq 1$, $q \geq 1/2$.

(b) Laat ook zien dat $X_{bq} \geq_{\text{SL}} X_{1,\frac{1}{2}}$ als $bq \geq \frac{1}{2}$ en $b \geq 1$.

▷ Maak een schets.

6. Het paar (X, Y) heeft als copula $C(u, v) = \Pr[F_X(X) \leq u, F_Y(Y) \leq v] = \frac{1}{2}\, uv + \frac{1}{2}\, \min(u, v)$ voor $0 < u < 1$, $0 < v < 1$. Neem aan dat F_X en F_Y continu zijn.
Bepaal Blomqvist's β voor dit paar: $\beta(X, Y) = 2 \times \Pr[(X - \widetilde{x})(Y - \widetilde{y}) > 0] - 1$ met $\Pr[X \leq \widetilde{x}] = \Pr[Y \leq \widetilde{y}] = 0.5$.

▷ Neem $U = F_X(X)$, $V = F_Y(Y)$, dan $C(u, v) = \Pr[U \leq u, V \leq v]$, en $\beta(X, Y) = \beta(U, V) = 2 * \Pr[(U - 1/2)(V - 1/2) > 0] - 1$.

Verder geldt $(U, V) \sim (U, IU + (1 - I)U^{\perp})$ met $I \sim$ Bernoulli(1/2), $U, U^{\perp}$ iid Uniform(0,1).

Dus $\Pr[(U - 1/2)(V - 1/2) > 0] = \frac{1}{2} \Pr[(U - 1/2)^2 > 0] + \frac{1}{2} \Pr[(U - 1/2)(U^{\perp} - 1/2) > 0] = \frac{3}{4}$.

7. De Tail-Value-at-Risk bij S op niveau p is gedefinieerd als TVaR$[S; p] = \frac{1}{1-p} \int_p^1$ VaR$[S; t]\, \mathrm{d}t$.
De Conditional Tail Expectation is CTE$[S; p] = \mathrm{E}\left[S \mid S >\right.$ VaR$\left.[S; p]\right]$.
Aangenomen dat de vdf bij S *continu* is, laat zien dat TVaR$[S; p] =$ CTE$[S; p]$ voor elke $p \in (0, 1)$.
Hint: substitueer $x =$ VaR$[S; t]$ in de uitdrukking voor TVaR.

▷ Schrijf $d =$ VaR$[S; p]$; TVaR$[S; p] = \frac{1}{1-p} \int_p^1$ VaR$[S; t]\, \mathrm{d}t$.

Substitueer $x =$ VaR$[S; t]$, dwz $F_S(x) = t$, $\mathrm{d}t / \mathrm{d}x = f_S(x)$, $t = p \Longrightarrow x =$ VaR$[S; t] = d$ en $t = 1 \Longrightarrow x = \infty$, dan gaat dit over in

$\frac{1}{1-p} \int_d^{\infty} x f_S(x)\, \mathrm{d}x = \int_d^{\infty} x \frac{f_S(x)}{\Pr[S>d]}\, \mathrm{d}x = \mathrm{E}[S \mid S > d] =$ CTE$[S; p]$.