Tentamen Schade actuariaat 2 **19/12/02**

Vermeld op elk ingeleverd vel registratienummer en naam.
Zie ook de bijgeleverde tabellen!
Waardering: elk onderdeel even zwaar.

1a) X en Y representeren de uitkering te verrichten op het leven van een man en een vrouw. Er geldt $P[X=1] = q_x = 1 - P[X=0]$, terwijl $P[Y=2] = q_y = 1 - P[Y=0]$. De volgende voorwaardelijke kans is nog gegeven: $P[X=1|Y=2] = p$. Een verzekeraar moet het bedrag $X+Y$ uitkeren, en heeft daartoe een stop-loss verzekering afgesloten met eigen behoud $3/2$.

a) Voor welke keuze van p zijn X en Y onafhankelijk? Voor welke is $\text{Var}[X+Y]$ maximaal? Voor welke p is de netto premie voor de stop-loss uitkering het grootst?

- Bedenk dat $p = P[X=1|Y=2]$, dus niet $P[X=1,Y=2]$! In ieder geval moet het volgende tabelletje in de uitwerking verschijnen, met de vraagtekens ingevuld:

	$X=0$	$X=1$	
$Y=0$	$1-q_x-q_y+p\cdot q_y$	?	$1-q_y$
$Y=2$	??	$p\cdot q_y$	q_y
	$1-q_x$	q_x	

X en Y o.o. betekent in ieder geval $P[X=1,Y=2] = P[X=1]\cdot P[Y=2]$, en $P[X=1,Y=2] = P[X=1|Y=2]\cdot P[Y=2] = p\cdot q_y$, zodat $p = q_x$. De variantie is minimaal als $E[(X+Y)^2]$ minimaal is (i.e., contramonotonie), en $E[(X+Y)^2] = 0 + 1^2\times? + 2^2\times?? + 3^2\cdot p\cdot q_y$ is minimaal voor *p zo klein mogelijk*. Omdat zowel ? als ?? ≥ 0 moeten zijn, kan soms p=0 niet als oplossing dienen. De stop-loss premie in $3/2$ is $1/2\times?? + 3/2\times p\times q_y$, en dit is maximaal voor p maximaal, dwz $p = \min\{q_x,q_y\}$. Of: maximaal bij comonotonie.

b) Als $F(x,y)$ de simultane vdf is van (X,Y), bepaal $F(x,y)$, laat zien dat dit stijgt in p. Wat houdt dat in voor paren stochasten (X,Y) en $(X^\bullet,Y^\bullet)$ met p resp. $p^\bullet$?

- Velen volstonden hier met $f(x,y) = P[X=x,Y=y]$, maar gevraagd wordt om $F(x,y) = P[X\leq x,Y\leq y]$. Er geldt $F(0,0) = 1-q_x-q_y+p\cdot q_y$, $F(0,2) = P[X\leq 0,Y\leq 2] = P[X\leq 0] = 1-q_x$, $F(1,0) = 1-q_y$, $F(1,2) = 1$, en bijvoorbeeld $F(1/2,4/3) = F(0,0)$.

  Dat $F(x,y)$ stijgt in p is duidelijk (velen vonden echter dat q_x-p ook steeg in p).

  Als $F^\bullet \geq F$, dan geldt dat (X,Y) minder samenhangen dan $(X^\bullet,Y^\bullet)$, en dus niet dat $(X,Y)\leq_{st}(X^\bullet,Y^\bullet)$.

2. Vergelijk twee compound Poisson verdelingen S_1 en S_2 op grond van de ordeningsconcepten $\leq_e$, $\leq_{SL}$ en $\leq_{st}$, als de parameters ervan gegeven worden door:
   1. $\lambda_1 = 3$, $p_1(x) = \dfrac{x}{6}$ voor $x=1,2,3$;
   2. $\lambda_2 = 2$, $p_2(x) = \dfrac{x}{5}$ voor $x=2,k$.

a) Als $k=3$, laat zien dat $S_1 \geq_{st} S_2$.

- *Vergelijk compound Poisson stochasten alleen als de parameter gelijk is. Zorg dat dat het geval is door nul-schaden toe te voegen. Dan blijkt $S_2 \sim S_3$ met specificaties $\lambda_3 = 3$, $p_3(x) = 1/3$ voor $x = 0,2,k$.*

  Dat $S_1 \geq_{st} S_3$ ziet men aan de kansverdeling $p_i(x)$ van de individuele schaden direct.

b) Als $k=4$, laat zien dat $S_1 \leq_{SL} S_2$, maar noch $S_1 \leq_{st} S_2$, noch $S_1 \geq_{st} S_2$.

- Volgt direct uit $p_1 \leq_{SL} p_3$ en $E[S_1] = E[S_2]$ voor $k=4$.

c) Als $k\geq 5$, geldt $S_1 \leq_{st} S_2$ dan wel?

- Neen, want $P[S_i=0] = \exp(-\lambda_i)$, $i=1,2$.

3. Veronderstel dat voor een compound Poisson risicoproces bekend is dat het verwachte aantal schades per jaar gelijk is aan 1, de premie per jaar 6β, en de verdeling van de afzonderlijke schades Gamma($2,1/\beta$), waarbij β een zeker positief getal is.

a) Bepaal de gehanteerde veiligheidsopslag θ op de premie. Wat is de waarde van het ruïnegetal R?

- $\theta=2$, $R = (2\beta)^{-1}$. N.B. Neem de kleinste wortel.

b) Leid een exacte uitdrukking af voor de ruïnekans $\psi(u)$ voor dit proces bij beginkapitaal u. Gebruik hierbij de volgende relatie, die u niet hoeft te bewijzen:

$$\int_0^\infty e^{ur}(-\psi'(u))\,du = \frac{\theta(m_X(r)-1)}{(1+\theta)[1+(1+\theta)\mu_1 r - m_X(r)]}.$$

- Standaard, behoudens de factor β. [Deze kan overigens geëlimineerd worden door alles in eenheden van β euro's uit te drukken, en dus $\beta=1$ te stellen.]

4. Bezie de familie van twee-dimensionale verdelingen van niet-negatieve stochasten X met parameters $b > 0$ en $0 \le q \le 1$, waarvoor geldt $P[X > x] = q(1 - x/b)$, $0 < x \le b$.
Laat X_0 een stochast zijn met bovenstaande verdeling, bij parameters q_0 en b_0.

a) Onderzoek de monotonie in de ordening $\le_{st}$ voor deze stochasten als één van de parameters constant wordt gehouden, en bepaal hoe stochasten met verschillende parameterwaarden doch dezelfde verwachting zich qua $\le_{SL}$ verhouden.

b) Uit de bevindingen van a) kan men gebieden concluderen met parameterwaarden waarvoor de betreffende stochasten groter/kleiner zijn in de ordeningen $\le_{st}$ resp. $\le_{SL}$ dan X_0. Schets die gebieden.

c) Voor een stochast X met parameterwaarden q en b zodanig dat $b > b_0$ én $b \cdot q < b_0 \cdot q_0$, laat zien dat noch $X \le_{SL} X_0$, noch $X \ge_{SL} X_0$ geldt.

- Het is het makkelijkst de vdf te schetsen. Bij gelijke b en grotere q onstaat een kleinere vdf, idem bij gelijke q en grotere b. Als de verwachting ($\frac{1}{2}bq$) constant is, ontstaan vdf's die precies 1× kruisen. Constante verwachting heerst op een hyperbool. Het ontstane plaatje lijkt op dat bij de binomiale verdelingen. N.B. In de tekening zou moeten blijken dat $0 \le q \le 1$!
  Voor het laatste onderdeel: bij die parameter waarden geldt $E[X] < E[X_0]$ maar $\mathrm{Max}[X] > \mathrm{Max}[X_0]$, zodat stop-loss orde niet kan gelden.