

UITWERKINGEN

Tentamen: Operationele Research 1D (4016)

Tentamendatum: 12-1-2010

Duur van het tentamen: 3 uur (maximaal)

Opgave 1 (15 punten) Beschouw het volgende lineaire programmeringsprobleem

P: $\max z = 1.5 x_1 + 0.5 x_2 - 0.5 x_3$

onder

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 &\leq 3 \\ x_2 - x_3 &\leq 0 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

- a) Vul op het antwoordenvel (achteraan aangehecht) het **eerste** tableau voor P verder aan tot een volledig simplextableau in **basisvorm**. Omcirkel vervolgens het pivot-element (=kruiselement).
 (De variabelen s_i staan voor slack/surplusvariabelen bij de i -de vergelijking ($i=1,2,3,4$) en de a_i zijn de artificiële variabelen bij de betreffende vergelijkingen.)

ANTWOORD:

		1.5	0.5	-0.5	0	0	0	-M	-M		
basis↓		z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	a_3	a_4	RHS↓
↓ c_B	x	1	-1.5	-0.5	+0.5	0	0	M	0	0	-4M
			-3M	-2M	-M						
0	s_1	0	2	2	-1	1	0	0	0	0	3
0	s_2	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	0
-M	a_3	0	2	1	0	0	0	-1	1	0	1
-M	a_4	0	1	1	1	0	0	0	0	1	3

- b) Voer een stap van de simplex methode uit en vermeld in het tweede tableau de pivotrij in basisvorm, evenals de verder benodigde gegevens om de nieuwe basisoplossing te bepalen en te kunnen concluderen of deze oplossing optimaal is. (Het tableau hoeft dus niet in zijn geheel te worden gevuld)

ANTWOORD:

		1.5	0.5	-0.5	0	0	0	-M	-M		
basis↓		z	x ₁	x ₂	x ₃	s ₁	s ₂	s ₃	a ₃	a ₄	RHS↓
↓c _B	z	1	0	-1/2 M + 1/4	-M + 1/2	0	0	- 1/2 M - 3/4	3/2 M + 3/4	0	-2 1/2 M + 3/4
0	s ₁	0									
0	s ₂	0									
1.5	x ₁	0	1	1/2	0	0	0	- 1/2	1/2	0	1/2
-M	a ₄	0									

- c) Het derde tableau op het antwoordenvel wordt verkregen na verdere iteratie. Vul in dit tableau de lege vlakken in, waar nodig gebruikmakend van de inproductregel. Licht op de achterkant van het antwoordenvel toe hoe je de inproductregel hebt gebruikt.

ANTWOORD:

		1.5	0.5	-0.5	0	0	0	-M	-M		
basis↓		z	x ₁	x ₂	x ₃	s ₁	s ₂	s ₃	a ₃	a ₄	RHS↓
↓c _B	z	1	0	0	0	0	0	-1	M+1	M- 1/2	- 1/2
0	s ₁	0	0	1.5	0	1	0	1.5	-1.5	1	4.5
0	s ₂	0	0	1.5	0	0	1	0.5	-0.5	1	2.5
1 1/2	x ₁	0	1	0.5	0	0	0	-0.5	0.5	0	0.5
- 1/2	x ₃	0	0	0.5	1	0	0	0.5	-0.5	1	2.5

- d) Na nog een iteratie, wordt het vierde tableau op het antwoordvel verkregen. Vul in dit tableau de niet-gearceerde vlakken, gebruik makend van de reeds gegeven informatie. Leg op de achterkant van het antwoordenvel uit hoe u de beschikbare gegevens gebruikt.

Wat is de bijbehorende oplossing? (D.w.z. de bijbehorende waarden van de beslissingsvariabelen.)

ANTWOORD:

		1.5	0.5	-0.5	0	0	0	-M	-M		
basis↓		z	x ₁	x ₂	x ₃	s ₁	s ₂	S ₃	a ₃	a ₄	RHS↓
↓c _B	Z	1	0	1	0	2/3	0	0			2 ½
0	s ₃	0				2/3	0	1	-1	2/3	3
0	s ₂	0				-1/3	1	0	0	2/3	1
1 ½	x ₁	0				1/3	0	0	0	1/3	2
- ½	x ₃	0				-1/3	0	0	0	2/3	1

- e) Hoeveel kan de rechterzijde van de vierde constraint worden verlaagd, zonder dat de basis van de optimale oplossing verandert? (Dat wil zeggen, dat dezelfde variabelen in de basis zitten; hun waarden kunnen wel verschillen).

ANTWOORD:

Gebruik de "horizontale" productregel. De kolom onder a₄ wordt vermenigvuldigd met 3+Δ. De rechterzijde verandert dus in s₃=3+2/3Δ, s₂=1+2/3 Δ,

x₁=2+1/3 Δ en x₃=1+2/3 Δ. Zowel s₂ als x₃ worden negatief als Δ<-3/2. De basis verandert dus als de rechterzijde van de 4^{de} constraint verlaagd wordt tot 3-3/2=3/2.

Opgave 2 (10 punten) Beschouw opnieuw het LP van Opgave 1.

- a) Formuleer het bijbehorende duale probleem. Vergeet de teken restricties op de duale variabelen niet.

ANTWOORD:

$$\text{Min } 3y_1 + y_3 + 3y_4$$

$$2y_1 + 2y_3 + y_4 \geq 1.5$$

$$2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \geq 0.5$$

$$-y_1 - y_2 + y_4 \geq -0.5$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \leq 0, y_4 \in \mathbb{R}$$

- b) In onderdeel 1d) is de optimale oplossing x^* van het bovenstaande primale LP gevonden. Gebruik de *complementaire slackness* condities om uit x^* de optimale duale variabelen te vinden.

ANTWOORD:

In de optimale oplossing van het primale probleem zijn s_2 en s_3 basisvariabelen dus in het duale probleem $y_2 = 0$ en $y_3 = 0$.

Ook x_1 zit in de basis $\rightarrow 2y_1 + 2y_3 + y_4 = 1.5$

En x_3 in de basis $\rightarrow -y_1 - y_2 + y_4 = -0.5$

2x2 stelsel oplossen : $y_1 = 2/3$ en $y_4 = 1/6$.

Ter contrôle : duale oplossing heeft ook waarde 2.5.

Opgave 3 (12 punten) In de Waddenzee liggen 4 gasvelden die men gaat aanboren vanaf het vaste land. Er komen drie kustlocaties in aanmerking om de 4 gasbronnen te bereiken, te weten: Zuidbroek, Middenmeer en Noordertong. De boorkosten voor het bereiken van een bepaalde bron zijn afhankelijk van de gekozen kustlocatie; deze zijn weergegeven in de volgende 3x4 matrix $B=(b_{ij})$.

vanaf locatie i	boorkosten b_{ij} per boring (in miljoenen euro's)			
	$j=1$	$j=2$	$J=3$	$j=4$
Zuidbroek ($i=1$)	6	8	3	7
Middenmeer ($i=2$)	2	1	8	1
Noordertong ($i=3$)	4	6	3	5

Vanuit Zuidbroek kan hoogstens 1 boring worden verricht, terwijl er vanuit Middenmeer en Noordertong maximaal twee boringen (per locatie) kunnen worden gedaan. (Dus in totaal zijn vier gezamenlijke boringen vanuit Middenmeer en Noordertong mogelijk.) Men wil **alle vier** gasbronnen tegen minimale totale kosten aanboren.

a) Formuleer dit probleem als geheeltallig lineair programmeringsprobleem (los het *niet* op).

ANTWOORD:

$$\min 6x_{11} + 8x_{12} + 3x_{13} + 7x_{14} + 2x_{21} + \dots + 5x_{34}$$

$$\text{s.t. } x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 2$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 2$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1$$

$$x_{ij} \in \{0,1,2\}$$

Omdat $x_{12}=0$, wordt x_{13} in de nieuwe basis ook 0. Na 1 iteratie hebben we dus:

		6	-4	3	-4	-9		
		j=1	j=2	j=3	j=4	dummy		
0	Zuidbroek	6	8	3	7	0		1
		1(-)	-12	0(+)	-11	-9		
5	Middenmeer	2	1	8	1	0		2
		+9	1	1(-)	0(+)	-4		
9	Noordertong	4	6	3	5	0		2
		+11(+)	-1	+9	1(-)	1		
		1	1	1	1	1		

Nu komt x_{31} in de basis en gaat x_{23} uit de basis (x_{23} heeft hogere directe kosten dan x_{13} en x_{34}). Na weer een iteratie hebben we:

		6	7	3	7	2		
		j=1	j=2	j=3	j=4	dummy		
0	Zuidbroek	6	8	3	7	0		1
		0(-)	-1	1	+0	+2(+)		
-6	Middenmeer	2	1	8	1	0		2
		-2	1	-11	1	-4		
-2	Noordertong	4	6	3	5	0		2
		1(+)	-1	-2	0	1(-)		
		1	1	1	1	1		

x_{15} komt nu in de basis ten koste van x_{11} .

		4	5	3	5	0		
		j=1	j=2	j=3	j=4	dummy		
0	Zuidbroek	6	8	3	7	0		1
		-2	-3	1	-2	0		
-4	Middenmeer	2	1	8	1	0		2
		-2	1	-9	1	-4		
0	Noordertong	4	6	3	5	0		2
		1(+)	-1	+0	0	1(-)		
		1	1	1	1	1		

Dit tableau is optimaal want er zijn geen positieve gereduceerde kosten.

c) Hoe zie je aan het optimale transport-tableau of er een alternatieve optimale oplossing bestaat?

ANTWOORD:

In het optimale tableau zijn de gereduceerde kosten van x_{33} exact 0. De optimale oplossing is dus niet uniek.

Opgave 4 (12 punten) We beschouwen het volgende beladingsprobleem: Een transporteur kan maximaal 20 ton vervoeren in zijn vrachtwagen en kan kiezen uit drie soorten producten. Alle producten worden voor het vervoer in standaardverpakking aangeboden. Van product 1 weegt een pakket 8 ton, voor product 2 is dat 7 ton en voor het derde product 2 ton. De opbrengst voor de transporteur is *per ton* respectievelijk 300, 100 en 200 euro. Van product 3 kunnen er vanwege veiligheidsvoorschriften maximaal 3 pakketten tegelijk worden vervoerd. Het doel is de vrachtwagen dusdanig te beladen dat de opbrengst van de vracht maximaal is.

- a) Geef een formulering van dit probleem als een *Dynamisch Programmeringsprobleem* door achtereenvolgens te beschrijven:
- a. de diverse stadia (n) in de DP formulering en de betekenis ervan voor het originele probleem

ANTWOORD:

Stadia $n=1,2,3$. in stadium n kiezen we het aantal pakketten van product n.

- b. de mogelijke toestanden S_n in de verschillende stadia

ANTWOORD:

Toestand S_n is de resterende ruimte (in tonnen) nadat producten 1 t/m $n-1$ al zijn gekozen.

- c. de mogelijke beslissingen X_n in elk stadium

ANTWOORD:

X_n is het aantal pakketten van product n

- d. de toestandsovergangen behorende bij de beslissingen

ANTWOORD:

$S_{n+1} = S_n - w_n X_n$, waarbij w_n het gewicht is van een pakket van product n.

- e. de recursieve formule ter berekening van het optimale rendement

ANTWOORD:

$F_n(S) = \max_x \{c_n(x) + F_{n+1}(S - w_n x)\}$

Hierin is $c_n(x)$ de opbrengst van x pakketten van product n.

- f. de betekenis van de waardefunctie in elk stadium

ANTWOORD:

$F_n(S)$ is de maximale opbrengst uit producten n t/m 3, als er met die producten S ton beladen mag worden.

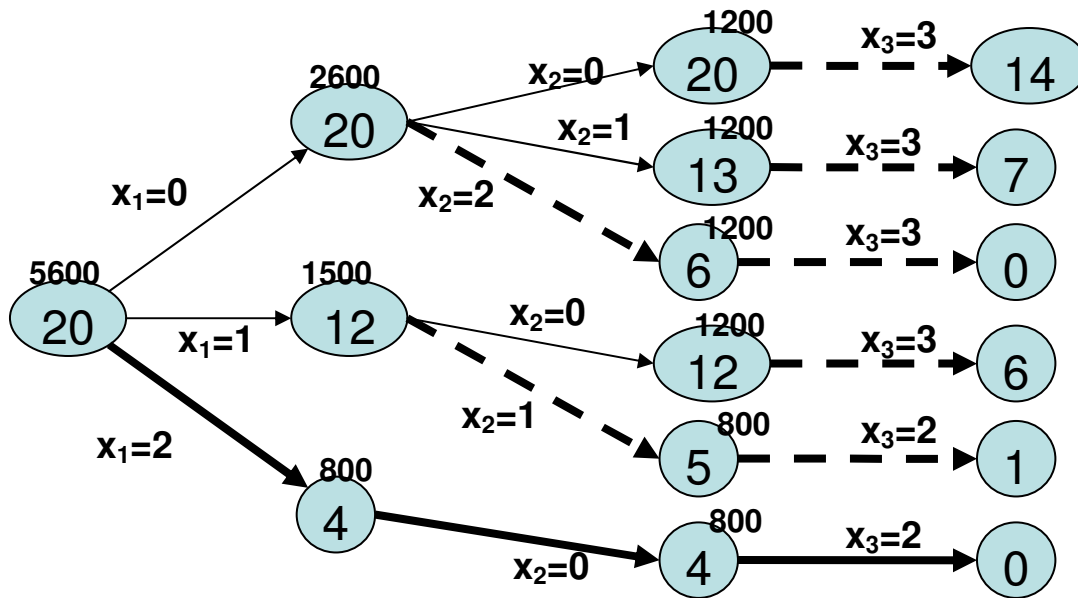
- g. de initialisatie van de recursie

ANTWOORD:

$F_4(S) = 0$.

b) Stel de bijbehorende boom op en los daarmee het DP probleem op.

ANTWOORD:



Het optimale pad is dikgedrukt (optimale keuzes die niet in het optimale pad zitten zijn dikgedrukt en gestippeld). De maximale opbrengst bedraagt 5600 en wordt verkregen door 2 pakketten van product 1 ($x_1=2$), geen pakketten van product 2 ($x_2=0$) en 2 pakketten van product 3 ($x_3=2$) mee te nemen.

c) Bovenstaand probleem kan ook worden opgelost als een Integer (Geheeltalig) Programmeringsprobleem. Formuleer dit IP probleem en los de LP relaxatie op (dat wil zeggen het lineaire programmeringsprobleem dat wordt verkregen door de geheeltaligheidseisen weg te laten). De LP relaxatie kan het eenvoudigst worden opgelost door het als een knapsack probleem te zien, maar elke andere oplossingsmethode is toegestaan.

ANTWOORD:

IP formulering:

$$\text{Max } 2400 x_1 + 700 x_2 + 400 x_3$$

$$\text{s.t. } 8x_1 + 7x_2 + 2x_3 \leq 20$$

$$x_3 \leq 3$$

$$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$$

waarbij \mathbb{Z} de verzameling van niet-negatieve gehele getallen is.

De relaxatie van een knapsackprobleem is eenvoudig op te lossen: kies eerst de maximale toegelaten hoeveelheid van het product dat het meeste opbrengt per ton, vervolgens het op een na meest rendabele product, etc. In dit geval is product 1 het meest rendabele en onbegrensd beschikbaar. We vullen de laadcapaciteit dus geheel met product 1: $x_1^{LP} = 2.5$ en $x_2^{LP} = x_3^{LP} = 0$. De bijbehorende opbrengst is $z^{LP} = 6000$.

d) De oplossing van de LP relaxatie bij a) is niet geheeltalig. Gebruik *Branch and Bound* om de optimale geheeltalige oplossing te vinden. (Uiteraard moet de uiteindelijke oplossing van het IP overeenkomen met de bij b) gevonden oplossing.)

ANTWOORD:

LP1: voeg toe de beperking $x_1 \leq 2$ en los weer op als knapsack probleem: $x_1^{LP1} = 2$, en dan $x_3^{LP1} = 2$ en tenslotte $x_2^{LP1} = 0$. Bijbehorende opbrengst $z^{LP1} = 5600$. Dit is een geheeltallige oplossing dus LP1 hoeft niet verder opgedeeld te worden.

LP2: voeg toe de beperking $x_1 \geq 3$ en los weer op als knapsack probleem: dit probleem is echter onoplosbaar. Dit gebied hoeft ook niet verder opgedeeld te worden.

Conclusie: LP1 levert de optimale oplossing: $x_1^* = 2$, $x_2^* = 0$ en $x_3^* = 2$, met $z^* = 5600$. Dit antwoord komt uiteraard overeen met dat bij onderdeel b.