Faculteit der Economie en Bedrijfskunde

Op dit voorblad vindt u belangrijke informatie omtrent het tentamen.
Lees dit voorblad voordat u met het tentamen begint!

Tentamen: Operational Research 1D (4016)

Tentamendatum: 28-10-2009

Duur van het tentamen: 3 uur (30 minuten extra mits vooraf toestemming)

U dient zich te legitimeren met uw UvA legitimatiebewijs met foto of uw UvA collegekaart samen met paspoort of rijbewijs of een ander geldig legitimatiebewijs (voor studenten) met foto. Als u voor dit tentamen niet bent ingeschreven dan heeft u geen recht op een judicium. Als u denkt wel recht te hebben op een judicium dan kunt u een schriftelijk verzoek (met bewijs) om alsnog een judicium te verkrijgen indienen bij de directeur van het Onderwijsinstituut.

Vermeld uw naam en studentnummer op elk apart blad.

Waarschuwing tegen fraude: Fraudeer niet! Bij fraude staat u als maximale straf de uitsluiting van alle tentamens voor een jaar te wachten.

Uw mobiele telefoon dient uitgeschakeld en opgeborgen in uw tas te zijn. Uw tas dient gesloten links van uw tafel op de vloer te zijn geplaatst.

Tijdens het tentamen is toiletbezoek niet toegestaan (tenzij het bij wijze van uitzondering door de hoofdsurveillant uitdrukkelijk wordt toegestaan).

Toegestane hulpmiddelen: potlood, pen, gum, liniaal, rekenmachine.

Toelichtingen voor dit tentamen: 4 opgaven bestaande uit meerdere onderdelen (aangegeven met a, b, etc). Binnen een opgave tellen alle onderdelen even zwaar mee. Voor Opgave 1 kunnen in totaal 14 punten worden behaald, voor Opgave 2 in totaal 9, in Opgave 3 in totaal 15 punten en in Opgave 4 in totaal 10 punten. Bijvoorbeeld: elk onderdeel in Opgave 1 is 2 punten waard. De twee onderdelen in Opgave 4 zijn elk 5 punten waard.

De uitslagen worden uiterlijk 18 werkdagen na de tentamendatum bekend gemaakt.

Tentamen inzage: bij de docent

- Beargumenteer uw antwoorden; een eenvoudig “Ja” of “Nee” volstaat niet als antwoord.
- Mocht u onvoldoende tijd hebben om berekeningen volledig uit te voeren, geeft u dan schematisch aan hoe deze voortgezet moeten worden (de volledige score van het betreffende onderdeel kan daarmee echter niet worden behaald).

Succes!

Opgave 1 Beschouw het volgende lineaire programmeringsprobleem

P: MAX $z = 4x_1 + 18x_2 + 9x_3 + 32x_4$

onder

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\leq 10 \\ 2x_3 + 4x_4 &\leq 4 \\ x_1 + x_3 &= 4 \\ 3x_2 - x_3 + 4x_4 &= 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Vul op het antwoordenvel (achteraan aangehecht) het **eerste** tableau voor P verder aan tot een volledig simplextableau in **basisvorm**. Omcirkel vervolgens het pivot-element (=kruiselement).
(De variabelen s_i staan voor slackvariabelen bij de i-de vergelijking en de a_i zijn de artificiële variabelen bij de betreffende vergelijkingen; i=1,2,3,4.)

b) Voer een stap van de simplex methode uit en vermeld in het tweede tableau de pivotrij in basisvorm, alsmede de verder benodigde gegevens om de nieuwe basisoplossing te bepalen en te kunnen concluderen of deze oplossing optimaal is. (Het tableau hoeft dus niet in zijn geheel te worden gevuld.)

c) Het derde tableau op het antwoordenvel wordt verkregen na verdere iteratie. Vul in dit tableau de lege vlakken in, waar nodig gebruikmakend van de inproductregel. Licht op de achterkant van het antwoordenvel toe hoe je de inproductregel hebt gebruikt.

d) Na nog enkele iteraties, wordt het vierde tableau op het antwoordvel verkregen. Vul in dit tableau de lege vlakken in, **gebruik makend van de reeds gegeven informatie** (het is niet de bedoeling zelf simplex iteraties uit te voeren vanaf het tableau in c). Leg op de achterkant van het antwoordenvel uit hoe u de beschikbare gegevens gebruikt.
Wat is de bijbehorende oplossing? (D.w.z. de bijbehorende waarden van de beslissingsvariablen.)

e) Het tableau bij d hoort bij de optimale oplossing. Hoeveel kan de coefficient van x_1 veranderen, zonder dat de optimale oplossing verandert?

f) Hoeveel kan de coefficient van x_3 veranderen, zonder dat de optimale oplossing verandert?

g) Hoeveel kan de rechterzijde van de tweede constraint (is nu 4) worden verlaagd, zonder dat de basis van de optimale oplossing verandert? (Dat wil zeggen, dat dezelfde variabelen in de basis zitten; hun waarden kunnen wel verschillen). Wat is het effect van deze verandering op de optimale criteriumwaarde?

Opgave 2 Beschouw opnieuw het LP van Opgave 1:

$$
\begin{array}{llrcl}
P: & \text{MAX } z & = & & 4\,x_1 + 18\,x_2 + 9\,x_3 + 32\,x_4 \\
\\
\text{onder} & & x_1 + 3\,x_2 + 5\,x_3 & & \leq 10 \\
& & 2\,x_3 + 4\,x_4 & & \leq 4 \\
& & x_1 \quad + \quad x_3 & & = 4 \\
& & 3\,x_2 - x_3 + 4\,x_4 & & = 10 \\
& & x_1, x_2, x_3, x_4 & & \geq 0
\end{array}
$$

a) Formuleer het bijbehorende duale probleem. Vergeet de teken restricties op de duale variabelen niet.

b) In onderdeel 1d) is de optimale oplossing x* van het bovenstaande primale LP gevonden. Gebruik de *complementaire slackness* condities om uit x* de optimale duale variabelen te vinden.

c) Beschouw nu de volgende uitbreiding van het primale probleem met een vijfde constraint:

$$
\begin{array}{llrcl}
P: & \text{MAX } z & = & & 4\,x_1 + 18\,x_2 + 9\,x_3 + 32\,x_4 \\
\\
\text{onder} & & x_1 + 3\,x_2 + 5\,x_3 & & \leq 10 \\
& & 2\,x_3 + 4\,x_4 & & \leq 4 \\
& & x_1 \quad + \quad x_3 & & = 4 \\
& & 3\,x_2 - x_3 + 4\,x_4 & & = 10 \\
& & 2\,x_2 + x_3 - 5\,x_4 & & \leq 1 \\
& & x_1, x_2, x_3, x_4 & & \geq 0
\end{array}
$$

Pas de duale overeenkomstig aan en leg uit of de optimale duale oplossing verandert. (Er hoeven geen nieuwe berekeningen te worden uitgevoerd.)

Opgave 3 Een fabrikant heeft drie productielocaties (Amsterdam, Breda en Capelle) en vier magazijnen. De magazijnen leveren maandelijks aan detailhandelaren in hun regio. Bij magazijn 1 zijn er maandelijks 80 producten nodig om aan de vraag van de detailhandel te kunnen voldoen. Bij magazijn 2, 3 en 4 is het aantal maandelijks benodigde producten achtereenvolgens 200, 160, en (eveneens) 160. De maandelijkse productiecapaciteit van de fabriek in Amsterdam is goed voor 100 producten en de fabrieken in Breda en Capelle leveren, respectievelijk, maandelijks 200 en 300 producten. De producten moeten vanwege veiligheidsrestricties individueel getransporteerd worden. De transportkosten per product worden gegegeven in de volgende tabel (in euro's):

Fabrieken	Magazijnen			
	1	2	3	4
Amsterdam	2000	3000	6000	2000
Breda	4000	6000	1000	7000
Capelle	9000	8000	3000	9000

Het doel van de fabrikant is de maandelijkse transportkosten naar de magazijnen te minimaliseren (maar wel aan de vraag voor de producten te voldoen).

a) Formuleer dit probleem als een Transport Probleem door het bijbehorende starttableau op te stellen. Gebruik de standaard manier om het starttableau op te stellen. Beargumenteer na het invullen van het starttableau of deze keuze optimaal is.
(N.B. U hoeft geen rekening te houden met de geheeltalligheid van het aantal te transporteren producten; het transportalgoritme doet dit automatisch.)

b) Doe **twee iteraties** met het transportalgoritme. Bepaal bij de eerste iteratie het nieuwe tableau volledig. Bij de tweede iteratie kunt u volstaan met het berekenen van de transportvolumes (de duale informatie hoeft niet te worden berekend).

c) Na verdere iteratie (hoeft u niet uit te voeren) wordt een optimaal transportschema gevonden. Hierbij levert de fabriek in Amsterdam alleen aan magazijn 4, wordt magazijn 1 alleen belevert vanuit Breda en magazijn 3 alleen vanuit Capelle. Stel het bijbehorende optimale tableau op en bepaal hoeveel de transportkosten van Breda naar magazijn 3 moeten worden, om de optimale transporten te doen veranderen? (Alle schema's die hieraan voldoen zijn optimaal.)

d) En hoeveel zouden de kosten voor transport van Capelle naar magazijn 2 moeten zijn om de optimale oplossing te doen wijzigen?

e) Stel dat de capaciteit van de fabriek in Amsterdam wordt verdubbeld. Pas het optimale tableau van onderdeel c aan en doe 1 extra iteratie. Is het resulterende transportschema optimaal?

Opgave 4. Beschouw het volgende geheeltallig programmeringsprobleem:

$$\max \ z = 5x_1 + x_2$$

onder de voorwaarden:

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1 - x_2 &\leq 1 \\ 4x_1 + x_2 &\leq 12 \\ x1,\ x2 &\geq 0, \text{ beide geheeltallig} \end{aligned}$$

a) Teken het toegelaten gebied van de LP relaxatie van dit probleem en bepaal het optimum van dit LP probleem grafisch.

b) Gebruik de Branch & Bound methode om het optimum voor het originele geheeltallig programmeringsprobleem te bepalen. Leg in elk deelprobleem uit waarom het betreffende gebied wel of niet verder dient te worden onderzocht.

Naam:
Studentnummer:

<u>IN TE LEVEREN</u> ANTWOORDENVEL BIJ HET TENTAMEN OR1D, 28-10-2009

1a)

basis↓		z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	a_3	a_4	RHS↓
↓c_B	z	1									
		0	1	3	5	0					
		0	0	0	2	4					
		0	1	0	1	0					
		0	0	3	-1	4					

1b)

basis↓		z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	a_3	a_4	RHS↓
↓c_B	z	1									
		0									
		0									
		0									
		0									

1c)

basis↓		z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	a_3	a_4	RHS↓
↓c_B	z	1									
	s_1	0	1	0	8	0	1	1	0	-1	4
	x_4	0	0	0	0.5	1	0	0.25	0	0	1
	a_3	0	1	0	1	0	0	0	1	0	4
	x_2	0	0	1	-1	0	0	-1/3	0	1/3	2

1d)

basis↓		z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	a_3	a_4	RHS↓
↓c_B	z	**1**	**0**	**0**	**7M+21**	**0**	**M+4**	**M+6**	**0**	**2**	**84**
	x_1	**0**					**1**	**1**	**0**	**-1**	
	x_4	**0**					**0**	**¼**	**0**	**0**	
	a_3	**0**					**-1**	**-1**	**1**	**1**	
	x_2	**0**					**0**	**-1/3**	**0**	**1/3**	