

Uitwerkingen tentamen van 26 juni 2009-10-12

Opgave 1 [Tevens huiswerkopdracht 1]

Beschouw het volgende lineaire programmeringsprobleem

$$P: \max z = x_1 - x_2 + 3x_3$$

$$\begin{aligned} \text{onder} \quad & 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ & x_1 - x_2 \leq 0 \\ & x_1 + 2x_3 \geq 2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- a) Vul op het antwoordenvel het **eerste** tableau voor P verder aan tot een volledig simplextableau in **basisvorm**. Omcirkel vervolgens het pivot-element (=kruiselement).
(De variabelen s_i staan voor slack/surplusvariabelen bij de i -de vergelijking ($i=1,2,3,4$) en de a_i zijn de artificiële variabelen bij de betreffende vergelijkingen.)

1a) met artificials: $\max z = x_1 - x_2 + 3x_3 - M a_3 - M a_4$

$$+1 \quad -1 \quad +3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -M \quad -M$$

basis↓		z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	a_3	a_4	RHS↓
↓ c_B	z	1	-2M-1	-M+1	-3M-3	0	0	M	0	0	-8M
0	s_1	0	2	-1	2	1	0	0	0	0	6
0	s_2	0	1	-1	0	0	1	0	0	0	0
-M	a_3	0	1	0	2	0	0	-1	1	0	2
-M	a_4	0	1	1	1	0	0	0	0	1	6

- b) Voer een stap van de simplex methode uit en vermeld in het tweede tableau de pivotrij in basisvorm, alsmede de verder benodigde gegevens om de nieuwe basisoplossing te bepalen en te kunnen concluderen of deze oplossing optimaal is. (Het tableau hoeft dus niet in zijn geheel te worden gevuld)

1b)

basis↓		z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	a_3	a_4	RHS↓
↓ c_B	z	1	$-\frac{1}{2}M$ $+\frac{1}{2}$	-M+1	0	0	0	$-\frac{1}{2}M$ $-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}M$ $+\frac{3}{2}$	0	-5M+3
0	s_1	0	1	-1	0	1	0	1	-1	0	4
0	s_2	0	1	-1	0	0	1	0	0	0	0
3	x_3	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	0	-1/2	$\frac{1}{2}$	0	1
-M	a_4	0	1/2	1	0	0	0	1/2	-1/2	1	5

DIT TABLEAU IS NIET OPTIMAAL, WANT ER ZIJN NOG NEGATIEVE COEFFICIENTEN IN DE Z-RIJ.

- c) Het derde tableau op het antwoordenvel wordt verkregen na verdere iteratie. Vul in dit tableau de lege vlakken in, waar nodig gebruikmakend van de inproductregel. Licht op de achterkant van het antwoordenvel toe hoe je de inproductregel hebt gebruikt.

1c)

basis↓		z	x ₁	x ₂	x ₃	s ₁	s ₂	s ₃	a ₃	a ₄	RHS↓
↓c _B	z	1	0	0	0	0	0	-2	M+2	M-1	-2
0	s ₁	0	1.5	0	0	1	0	1.5	-1.5	1	9
0	s ₂	0	1.5	0	0	0	1	0.5	-0.5	1	5
3	x ₃	0	0.5	0	1	0	0	-0.5	0.5	0	1
-1	x ₂	0	0.5	1	0	0	0	0.5	-0.5	1	5

INPRODUCTREGEL: (de gele getallen in de z-rij worden verkregen door de kolom eronder te vermenigvuldigen (inproduct) met de gele getallen links van het tableau).

- d) Na nog een iteratie, wordt het vierde tableau op het antwoordvel verkregen. Vul in deze tableau de niet-gearceerde vlakken, gebruik makend van de reeds gegeven informatie. Leg op de achterkant van het antwoordenvel uit hoe u de beschikbare gegevens gebruikt.

Wat is de bijbehorende oplossing? (D.w.z. de bijbehorende waarden van de beslissingsvariablen.)

1d)

basis↓		z	x ₁	x ₂	x ₃	s ₁	s ₂	s ₃	a ₃	a ₄	RHS↓
↓c _B	z	1	2	0	0	4/3	0	0	M	1/3 +M	10
0	s ₃	0	1	0	0	2/3	0	1	-1	2/3	6
0	s ₂	0	1	0	0	-1/3	1	0	0	2/3	2
3	x ₃	0	1	0	1	1/3	0	0	0	1/3	4
-1	x ₂	0	0	1	0	-1/3	0	0	0	2/3	2
		-8M	6	0	2	6					

(de grijze vlakken zijn in onderdeel d niet gevraagd, maar zijn ingevuld voor gebruik in onderdeel e)

“HORIZONTALE PRODUCTREGEL”: de gele getallen rechts van het tableau worden verkregen door de rij links ervan met de gele rij onder het tableau te vermenigvuldigen (inproduct). Eventueel kan de oplossingswaarde (hier 10) gevonden worden door de gewone inproductregel te gebruiken op de kolom eronder.

- e) Waarom kunnen we concluderen dat het tableau bij d hoort bij de optimale oplossing? En hoeveel kan de coëfficiënt van x₁ veranderen, zonder dat de optimale oplossing verandert? En de coëfficiënt van x₂?

OPTIMAAL want alle coëfficiënten in de z-rij (er moeten er nog twee bepaald worden in de grijze vlakken) zijn niet-negatief.

COEFFICIENT van x₁: deze variabele zit niet in de basis; uit de z-rij lezen we dat de coëfficiënt meer dan 2 groter moet worden (dus van 1 naar meer dan 3), om de optimale oplossing te vernaderen.

COEFFICIENT van x₂ (noem deze c₂ en de verandering Δc₂):

- dit is een basisvariabele, dit gaat dus effect hebben op de coëfficiënten van de z-rij behorende bij restvariabelen.
- Toevallig is de z-rij coëfficiënt van x_1 ongevoelig voor c_2 .
- De coëfficiënt $4/3$ van s_1 gaat wel veranderen: $-1/3 \Delta c_2$ dus als $\Delta c_2 > 4$ verandert de oplossing zeker.
- Ook de coëfficiënt van a_4 verandert met $2/3 \Delta c_2$. Maar vanwege de "M" zal " $1/3+M+2/3 \Delta c_2$ " nooit negatief worden (herinner dat je voor M "oneindig" moet lezen), ook niet als Δc_2 "erg negatief" wordt.

f) Hoeveel kan de rechterzijde van de vierde constraint (is nu 6) worden verlaagd, zonder dat de basis van de optimale oplossing verandert? (Dat wil zeggen, dat dezelfde variabelen in de basis zitten; hun waarden kunnen wel verschillen). Wat is het effect van deze verandering op de optimale criteriumwaarde?

GEBRUIK HIERVOOR DE "HORIZONTALE" PRODUCTREGEL. Als de vierde constraint verandert met Δb_4 , dan veranderen de waarden van de basisvariabelen in het optimum in (respectievelijk)
 $s_3=6+2/3 \Delta b_4$, $s_2=2+2/3 \Delta b_4$, $x_3=4+1/3 \Delta b_4$ en $x_2=2+2/3 \Delta b_4$. Zolang deze waarden allen niet-negatief zijn, is de oplossing toegelaten en optimaal (want de z-rij verandert niet). Als een van deze waarden negatief wordt, dan is de oplossing niet toegelaten (en is dus bijv. een duale-simplex stap nodig om een toegelaten oplossing te vinden). Hieruit volgt dat de optimale oplossing niet verandert als $\Delta b_4 \geq -3$ (bij < -3 worden s_2 en x_2 negatief).

Opgave 2 (Was geen huiswerkopdracht – maar bouwt wel voort op de eerste huiswerkopdracht)

Beschouw opnieuw het LP van Opgave 1:

$$P: \max z = x_1 - x_2 + 3 x_3$$

$$\text{onder} \quad \begin{array}{rcll} 2x_1 & - & x_2 & + 2x_3 & \leq 6 \\ x_1 & - & x_2 & & \leq 0 \\ x_1 & & & + 2x_3 & \geq 2 \\ x_1 & + & x_2 & + x_3 & = 6 \\ & & & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

a) Formuleer het bijbehorende duale probleem. Vergeet de teken restricties op de duale variabelen niet.

$$\begin{aligned} \min Z &= 6y_1 + 2y_3 + 6y_4 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 &\geq 1 \\ -y_1 - y_2 + y_4 &\geq -1 \\ 2y_1 + 2y_3 + y_4 &\geq 3 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \leq 0, y_4 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

b) In onderdeel 1d) is de optimale oplossing x^* van het bovenstaande primale LP gevonden. Gebruik de *complementary slackness* condities om uit x^* de optimale duale variabelen te vinden.

$$s_2^* > 0 \Rightarrow y_2^* = 0$$

$$s_4^* > 0 \Rightarrow y_4^* = 0$$

en omgekeerd:

$$x_2^* > 0 \Rightarrow -y_1^* + y_5^* = -1$$

$$x_3^* > 0 \Rightarrow 2y_1^* + y_5^* = 1$$

dus

$$3y_1^* = 4 \Rightarrow y_1^* = \frac{4}{3}$$

$$y_5^* = \frac{1}{3}$$

CONTROLE: $6 \cdot \frac{4}{3} + 0 + 0 + 6 \cdot \frac{1}{3} = 10$ (komt overeen met waarde van primale).

c) Beschouw nu de volgende uitbreiding van het primale probleem met een vierde beslissingsvariabele x_4 .

$$P': \max z = x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4$$

$$\begin{array}{rcccccl} \text{onder} & 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & +x_4 & \leq 6 \\ & x_1 & -x_2 & & +x_4 & \leq 0 \\ & x_1 & & +2x_3 & -x_4 & \geq 2 \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & = 6 \\ & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Pas de duale overeenkomstig aan en gebruik de sterke dualiteit om te laten zien dat de optimale oplossing van de primale onveranderd blijft.

ANTWOORD: extra voorwaarde:

$$y_1 + y_2 = y_3 - y_4 \geq 1$$

y^* onder b) voldoet hieraan \rightarrow optimaal

$\rightarrow x_4$ is een restvariabele, dus 0.

Opgave 3 (Tevens huiswerkopdracht 2; alleen de hoeveelheden zijn vermenigvuldigd met 2)

De Nederlandse Bank heeft drie geheime locaties (A, B en C) waar ze de nationale goudreserve bewaart. Vanwege verhoogde veiligheidsrisico's worden deze locaties verbouwd. Tijdens de verbouwing wordt bij elke locatie een tijdelijke opslag in gebruik genomen. Het blijkt echter niet mogelijk om op alle locaties voldoende tijdelijke opslagcapaciteit te creëren. De tijdelijke capaciteit bij A is 30 kamers (een "kamer" is de volume-eenheid die wordt gehanteerd voor de opslag van goud), bij B is dit 22 kamers en bij C 36 kamers. Momenteel zijn de goudvoorraden 28 kamers in A, 16 kamers in B en 44 kamers in C.

Bij het herschikken van de voorraden gelden hoge beveiligingskosten van het transport. Bij een transport tussen A en B zijn de kosten 300.000 euro per kamer, ongeacht de richting van het transport. Bij transport van A naar C zijn de kosten 400.000 per kamer en in omgekeerde richting is dit 700.000. Evenzo zijn bij transport van B naar C de kosten 200.000 per kamer en in tegenovergestelde richting 500.000. Uiteraard zijn er geen transportkosten voor goud dat niet van locatie verandert. Kamers hoeven niet in hun geheel te worden getransporteerd, de kosten zijn dan ook proportioneel lager. Bijvoorbeeld: transport van een halve kamer van A naar B kost 150.000 euro.

Het doel van De Nederlandse Bank is om de kosten te minimaliseren van het transport van goud dat van locatie verandert. (Het gaat enkel om de kosten van transport van huidige locaties naar tijdelijke opslag; men kan aannemen dat na de verbouwingen de goudvoorraden niet weer van locatie hoeven te veranderen omdat de nieuwe opslagcapaciteiten niet minder zullen zijn dan die van de tijdelijke opslag.)

- a) Formuleer dit probleem als een Transport Probleem door het bijbehorende starttableau op te stellen. Voor de vervolgvragen is het belangrijk dat je de locaties in de volgorde A, B en C zet (dus zowel in de rijen van boven naar beneden, als in de kolommen van links naar rechts). Verder moet er in het starttableau uitgegaan worden dat er in eerste instantie (d.w.z. in het eerste tableau) geen transport vanuit A gepland is, terwijl er 2 kamers van B naar A worden ingepland (ook dit geldt alleen voor het eerste tableau). Deze keuzes corresponderen met de standaard manier om het starttableau op te stellen.

Beargumenteer na het invullen van het starttableau dat deze keuze niet optimaal is.

		0	-3	-8		
		A	B	C		
0	A	⁰ 28	³ -6	⁴ -12	28	
3	B	³ 2	⁰ 14	² -7	16	
8	C	⁷ +1	⁵ 8	⁰ 36	44	
		30	22	36		

Niet optimaal want er zijn positieve gereduceerde kosten (+1).

- b) Doe een iteratie met het transportalgoritme en bepaal het nieuwe tableau volledig.

		0	-3	-8		
		A	B	C		
0	A	⁰ 28	³ -6	⁴ -12	28	
3	B	³ 2 ^{-A}	⁰ 14 ^{+A}	² -7	16	
8	C	⁷ +1 ^{+A}	⁵ 8 ^{-A}	⁰ 36	44	
		30	22	36		

$\Delta=2 \rightarrow$

		0	-2	-7	
		A	B	C	
0	A	⁰ 28	³ -5	⁴ -11	28
2	B	³ -1	⁰ 16	² -7	16
7	C	⁷ 2	⁵ 6	⁰ 36	44
		30	22	36	

- c) Bij de optimale herallocaties van de goudkamers wordt er alleen goud getransporteerd vanuit locatie C: 2 kamers naar A en 6 kamers naar B. Hoeveel zouden de transportkosten van B naar A moeten worden, om de optimale transporten te doen veranderen?

ANTWOORD: $\Delta_{CB_A} \leq -1$ dus $c_{BA} \leq 2$

- d) En hoeveel zouden de kosten voor transport van C naar A moeten zijn om de optimale oplossing te doen wijzigen?

		0	-2- Δ	-7- Δ	
		A	B	C	
⁰	A	⁰ 28	³ -5- Δ	⁴ -11- Δ	28
^{2+Δ}	B	³ -1+ Δ	⁰ 16	² -7	16
^{7+Δ}	C	^{7+Δ} 2	⁵ 6	⁰ 36	44
		30	22	36	

ANTWOORD:

$\Delta \leq -5$ of $\Delta \leq -11$ of $\Delta \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 1$ (BA ipv CA in basis) of $\Delta \leq -5$ (extra CA en AB ipv CB in basis).

Opgave 4. (Tevens huiswerkopdracht 3 – ter bespreking tijdens “vragenuur” op 22 oktober)

In een kassa liggen $N=6$ muntsoorten. Muntsoort j heeft waarde w_j en er zijn v_j stuks in voorraad in de kassa ($j=1,2,\dots,N$). De waarden van deze parameters zijn $w_1=150$, $w_2=100$, $w_3=115$, $w_4=54$, $w_5=25$ en $w_6=1$; van alle munten – behalve van muntsoort 6 – zijn er twee in de kas, en $v_6=10$.

De kassier moet een bedrag $B=170$ (precies) uit gaan betalen en wil hiervoor het totale aantal te gebruiken muntstukken minimaliseren.

- a) Representeer dit probleem als een kortste-pad probleem. (Hierbij hoeft alleen de beslissingsboom met vermelding van de bijbehorende kosten te worden getekend; de formulering als DP volgt bij b en de oplossing bij c.)
- b) Formuleer dit probleem op mathematische wijze als een N-staps dynamisch programmerings-probleem. Hierbij komen ter sprake de definitie van:
 - (1) de toestand S_n ($n=1,\dots,N$);
 - (2) de toegelaten beslissingen x_n ($n=1,\dots,N$);
 - (3) de transformatieformule voor S_{n-1} uit S_n en x_n ;
 - (4) de directe kostenfunctie;
 - (5) de recursieve functionaalvergelijking voor $f_n(S)$ en de betekenis in woorden van $f_n(S)$.
- c) Gebruik de beslisboom bij onderdeel a om het DP probleem op te lossen en zo het minimum aantal te gebruiken munten te bepalen.