

Inleiding Speltheorie - 27 januari 2003

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven. Tijdsduur: 14.00 tot 17.00 uur.

Opgave 1 (20 punten) Gezamenlijke Productie

De inwoners $N = \{1, 2, \dots\}$ van het dorp de Arena, bezitten gezamenlijk een technologie voor de produktie van een (perfect deelbaar) goed Y . Deze technologie wordt volledig beschreven door de kwadratische kostenfunctie $c(y) = y^2$, d.w.z. de produktie van y eenheden kost y^2 Euro. Iedere bewoner $i \in N$ plaatst tegelijkertijd zijn bestelling met de gewenste hoeveelheid q_i van goed Y , waarna de totale gewenste hoeveelheid $q(N) = q_1 + q_2 + \dots + q_n$ wordt geproduceerd. De kosten worden proportioneel doorgerekend per individu, wat betekent dat inwoner i voor de bestelling van q_i eenheden

$$x_i = \frac{q_i}{q(N)} \cdot c(q(N)) \quad (1)$$

Euro betaalt, uitgaande van het feit dat $q(N) > 0$. Anders hoeft niemand iets te betalen. Inwoner $i \in N$ ontleent nut aan de geproduceerde hoeveelheid goed q_i en de daarbij behorende kosten x_i , welk wordt weergegeven door de nutsfunctie u_i :

$$u_i(q_i, x_i) = aq_i - x_i \text{ waarbij } a > 0. \quad (2)$$

De constante a kan men interpreteren als de prijs die inwoner $i \in N$ krijgt bij verkoop van zijn eenheden van goed Y .

- Bepaal de eerste orde voorwaarde voor de nutsmaximalisatie van inwoner i die de produktie voor de andere inwoners als gegeven beschouwt.
- Neem aan dat alle individuele bestellingen in evenwicht positief zijn en bepaal m.b.v. onderdeel (a) de totale hoeveelheid $q^*(N)$ die dan geproduceerd wordt, en wel in termen van de constante a en het aantal inwoners n .
- De dorpsraad vergelijkt de som van de individuele nutten U^* (in evenwicht) met het sociale optimum \bar{U} dat berekend wordt aan de hand van het optimalisatieprobleem:

$$\bar{U} = \max_{q_1, q_2, \dots, q_n} \{(aq_1 + aq_2 + \dots + aq_n) - c(q_1 + q_2 + \dots + q_n)\} \quad (3)$$

Laat zien dat $U^* < \bar{U}$.

Opgave 2 (20 punten) Gegeven is het bi-matrix spel G

	L	M	R
T	$a, 2$	$2, 0$	$0, a$
M	$0, 0$	$1, 1$	$0, 0$
B	$-a, 3$	$0, 0$	$a, 2$

Hierbij is $a > 0$.

- Bepaal de Nash evenwichten in zuivere strategieën.
- Laat zien dat speler 2 de strategie R in geen enkel evenwicht, zuiver of gemengd, speelt.
- Bepaal alle evenwichten in gemengde strategieën

Opgave 3 (30 punten) Gegeven is het volgende spel G :

	L	R
T	$0, 0$	$3, 3$
B	$3, 3$	$2, 2$

$G(2)$ is het twee keer herhaalde spel G zonder verdiscontering.

- Geef een grafische representatie van $G(2)$ in uitgebreide vorm.
- Is $G(2)$ een spel met perfecte informatie of een spel met imperfecte informatie en waarom?
- Bepaal voor $G(2)$, (i) het aantal deelspellen, (ii) het aantal strategieën van de spelers, en (iii) het aantal mogelijke spelverlopen.
- Geef één van de vele deelspelperfecte evenwichten van $G(2)$ waarbij de spelers in periode 1 volledig randomiseren.
- Bepaal een evenwicht van $G(2)$ dat niet deelspelperfect is.

Opgave 4 (30 punten)

Bedrijven 1 en 2 brengen gelijktijdig een identiek goed op de markt. De inverse vraagfunctie is $p = 60 - (q_1 + q_2)$. De kostenfunctie $30q_1$ van bedrijf 1 is algemeen bekend. De kostenfunctie van bedrijf 2 is c_2q_2 , waarbij de marginale kosten c_2 met gelijke kansen $c_H = 36$, $c_M = 30$ of $c_L = 24$ kunnen zijn. Bedrijf 2 kent zijn eigen technologie en dus ook de precieze waarde van c_2 .

(a) Beschouw deze situatie als een spel met onvolledige informatie. Bepaal de strategische variabelen en de winstfuncties van beide bedrijven. Bereken het uniek Bayesiaanse evenwicht van dit Cournot spel.

(b) Voordat de beslissingen omtrent de productie-omvang genomen worden, heeft de manager van bedrijf 2 een optie om zijn technologie aan zijn concurrente te demonstreren. Hij hoeft dat niet te doen maar als hij haar uitgenodigd heeft moet hij daadwerkelijk zijn ware kostenfunctie onthullen. Bepaal een perfect Bayesiaans evenwicht van dit 2 perioden spel. Bereken de bijbehorende evenwichtshoeveelheden in alle informatieverzamelingen en geef ze in een spelboom aan.