Inleiding Speltheorie - 29 januari 2003, 9.30-12.30 uur

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven. Het totaal aantal te behalen punten is 100. De waardering per opgave staat vermeld.

Opgave 1 (20 punten)

Gegeven is het bi-matrix spel G:

	L	M	R
T	$-a, 2$	$2, 0$	$0, -a$
M	$0, 0$	$1, 1$	$0, 0$
B	$a, 3$	$0, 0$	$-a, 2$

Hierbij is $a > 0$.

(a) Bepaal alle Nash evenwichten in zuivere strategieën.

(b) Laat zien dat speler 2 de strategie R in geen enkel evenwicht, zuiver of gemengd, speelt.

(c) Bepaal een enkel evenwicht in gemengde strategieën waarbij speler 1 volledig randomiseert over de strategieën T, M, en B.

Oplossing:

(a) Het unieke evenwicht in zuivere strategieën is (B, L) , namelijk als we naar individuele verbeteringen kijken aangeven door de pijlen in onderstaand diagram dan is geen enkele cel behalve die met de uitbetalingen $(a, 3)$ stabiel (alleen inkomende pijlen).

$$\begin{array}{ccccc}
-a,2 & \longleftarrow & 2,0 & \longleftarrow & 0,-a \\
\downarrow & & \uparrow & & \\
0,0 & & 1,1 & \longleftarrow & 0,0 \\
\downarrow & & & & \uparrow \\
a,3 & \longleftarrow & 0,0 & & -a,2
\end{array}$$

(b) Strategie R is nooit een beste antwoord, en wordt dus niet in een evenwicht gebruikt.

(c) Uit (b) volgt dat we naar het gereduceerde spel mogen kijken waarbij R niet gespeeld wordt, d.w.z. het bi-matrix spel

	L	M
T	$-a, 2$	$2, 0$
M	$0, 0$	$1, 1$
B	$a, 3$	$0, 0$

Stel nu dat in evenwicht de strategieën $p = (p_T, p_M, p_B)$ en $q = (q_L, q_M)$ gespeeld worden. Bij volledig randomiseren (p_L, p_M en p_R zijn strikt positief) is speler 1 indifferent tussen de drie strategieën T, M, en R. Dit leidt tot de gelijkheden

$$\mathbb{E}(T \mid q) = \mathbb{E}(M \mid q) = \mathbb{E}(B \mid q) \Longleftrightarrow -aq_L + 2q_M = q_M = aq_L \tag{1}$$

Tezamen met het feit dat q een kansvector is, volgt $q_L + q_M = 1$ en $q_L + aq_L = 1$ en dus $q = \left(\frac{1}{1+a}, \frac{a}{1+a}\right)$. Verder is speler 2 indifferent is tussen de strategieën L en M (waarom is geen zuivere strategie mogelijk?) hetgeen leidt tot de condities

$$\mathbb{E}(L \mid p) = \mathbb{E}(M \mid p) \Longleftrightarrow 2p_L + 3p_B = p_M \tag{2}$$

Neem dus een kansvector p waarvoor geldt dat $2p_L + 3p_B = p_M$, bijvoorbeeld $p = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$. Dan is $\left(p, \left(\frac{1}{1+a}, \frac{a}{1+a}, 0\right)\right)$ een Nash evenwicht voor G dat aan de eisen voldoet.

Opgave 2 (30 punten)

Gegeven is het volgende spel G :

	L	R
T	$0,0$	$3,3$
B	$3,3$	$2,2$

$G(2)$ is het twee keer herhaalde spel G zonder verdiscontering.

(a) Geef een grafische representatie van $G(2)$ in uitgebreide vorm.

(b) Is $G(2)$ een spel met perfecte informatie of een spel met imperfecte informatie en waarom?

(c) Bepaal voor $G(2)$, (i) het aantal deelspellen, (ii) het aantal strategieën van de spelers, en (iii) het aantal mogelijke spelverlopen.

(d) Geef één van de vele deelspelperfecte evenwichten van $G(2)$ waarbij de spelers in periode 1 volledig randomiseren.

(e) Bepaal een evenwicht van $G(2)$ dat niet deelspelperfect is.

Oplossing:

1.

(b) Een spel in uitgebreide vorm dat geen spel met perfecte informatie is wordt een spel met imperfectie informatie genoemd. Aangezien er informatieverzamelingen zijn met twee elementen, is $G(2)$ dus een spel met imperfecte informatie.

(c) (i) $G(2)$ heeft 5 deelspellen, te weten $G(2)$ zelf en de echte deelspellen volgend op de strategieën $(T, L), (T, R), (B, L)$, en (B, R).
(ii) In ieder van de 5 informatieverzamelingen voor de individuele spelers zijn er twee acties, en dus is het aantal strategieën voor beide spelers gelijk aan $2^5 = 32$.
(iii) Het aantal mogelijke spelverlopen is 16.

(d) De strategieëncombinatie $(p^*, q^*) = \left(\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)\right)$ is een gemengd Nash-evenwicht van G. Dan is ten alle tijden in beide perioden dit Nahs evenwicht spelen een deelspelperfect evenwicht. Eenzijdig afwijken van bovenstaande strategie loont niet voor de individuele speler, dus specificeert bovenstaande strategie een Nash evenwicht. Verder wordt in de tweede ronde een Nash evenwicht van G gespeeld, dus wordt in ieder deelspel een Nash evenwicht gespeeld waardoor deelspelperfectie verkregen wordt.

(e) Een voorbeeld van een evenwicht dat niet deelspelperfect is: speler 1 speelt in ronde 1 B, en speler 2 L. Speler 1 respectievelijk speler 2 vervolgt met B resp. L als in ronde 1 (B, L) geresulteerd heeft. In alle andere gevallen spelen ze T en R respectievelijk. Het is duidelijk dat eenzijdig afwijken in een bepaalde periode geen zin heeft, aangezien met de gegeven strategieën slechts één spelverloop resulteert in de maximale uitbetaling 6 voor beiden. Dat is (B, L) tweemaal herhalen. Verder is de geconstrueerde strategie niet deelspelperfect, namelijk op een deelspel na (T, L) wordt duidelijk geen Nash evenwicht gespeeld.

Opgave 3 (20 punten) Gezamenlijke Produktie

De inwoners $N = \{1, 2, \ldots n\}$ van het dorp de Arena, bezitten gezamenlijk een technologie voor de produktie van een (perfect deelbaar) goed Y. Deze technologie wordt volledig beschreven door de kwadratische kostenfunktie $c(y) = y^2$, d.w.z. de produktie van y eenheden kost y^2 Euro. Iedere bewoner $i \in N$ plaatst tegelijkertijd zijn bestelling met de gewenste hoeveelheid q_i van goed Y, waarna de totale gewenste hoeveelheid $Q = q_1 + q_2 + \ldots + q_n$ wordt geproduceerd. De kosten worden proportioneel doorgerekend per individu, wat betekent dat inwoner i voor de bestelling van q_i eenheden

$$x_i = \frac{q_i}{Q} \cdot c(Q) \tag{3}$$

Euro betaalt, uitgaande van het feit dat $Q > 0$. Als $Q = 0$ dan hoeft niemand iets te betalen. Inwoner $i \in N$ ontleent nut aan de geproduceerde hoeveelheid goed q_i en de daarbij behorende kosten x_i, welk wordt weergegeven door de nutsfunctie u_i:

$$u_i(q_i, x_i) = aq_i - x_i \text{ waarbij } a > 0. \tag{4}$$

De constante a kan men interpreteren als de prijs die inwoner $i \in N$ krijgt bij verkoop van zijn eenheden van goed Y.

(a) Bepaal de eerste orde voorwaarde voor de nutsmaximalisatie van inwoner i die de produktie voor de andere inwoners als gegeven beschouwt.

(b) Neem aan dat alle individuele bestellingen in evenwicht positief zijn en bepaal m.b.v. onderdeel (a) de totale hoeveelheid Q^* die dan geproduceerd wordt, en wel in termen van de constante a en het aantal inwoners n.

(c) De dorpsraad vergelijkt de som van de individuele nutten U^* (in evenwicht) met het sociale optimum $\bar{U}$ dat berekend wordt aan de hand van het optimalisatieprobleem:

$$\bar{U} = \max_{q_1, q_2, \ldots, q_n} \{(aq_1 + aq_2 + \ldots + aq_n) - c(q_1 + q_2 + \ldots + q_n)\} \tag{5}$$

Laat zien dat $U^* < \bar{U}$.

Oplossing:

(a) De eerste orde voorwaarde voor de nutsmaximaliserende inwoner i luidt:

$$\frac{\partial}{\partial q_i} u_i \left(q_i, \frac{q_i}{Q} \cdot c(Q) \right) = 0,$$

hetgeen betekent dat

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \left\{ aq_i - \frac{q_i}{Q} \cdot c(Q) \right\} = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial q_i} \{aq_i - q_i Q\} = 0 \Longleftrightarrow a - Q - q_i = 0.$$

(b) Omdat alle in evenwicht geproduceerde hoeveelheden positief zijn moet er sprake zijn van een inwendig extremum waarvoor in (a) de eerste orde voorwaarden zijn opgesteld. Maximaliteit volgt uit de tweede orde voorwaarde voor optimalisatie:

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 q_i} u_i \left(q_i, \frac{q_i}{Q} \cdot c(Q) \right) = \frac{\partial}{\partial q_i} (a - Q - q_i) = -2 < 0.$$

Maar dan volgt met sommatie over alle eerste orde condities dat

$$\sum_{i \in N} (a - Q^* - q_i^*) = 0 \Longleftrightarrow na - nQ^* - Q^* = 0 \Longleftrightarrow Q^* = \frac{na}{n+1}.$$

Hieruit volgt dus het symmetrische evenwicht met $q_i^* = \frac{a}{n+1}$.

(c) Som van de individuele nutten onder q^* is

$$U^* = \sum_{i \in N} u_i (q_i^*, q_i^* Q^*) = Q^* (a - Q^*) = \frac{na}{n+1} \left(a - \frac{na}{n+1} \right) = \frac{na}{(n+1)^2}.$$

Verder

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \max_{q_1, q_2, \ldots, q_n} \{(aq_1 + aq_2 + \ldots + aq_n) - c(q_1 + q_2 + \ldots + q_n)\} = \\ &= \max_{Q \geq 0} \left\{ aQ - Q^2 \right\} = \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Voor alle $n \geq 1$ geldt

$$\frac{n}{(n+1)^2} < \frac{1}{2}, \text{ dus ook } \frac{na}{(n+1)^2} < \frac{a}{2}, \text{ wat betekent dat } U^* < \bar{U}.$$

Opgave 4 (30 punten)

Boris overweegt om een tweedehandse televisie te kopen bij het bedrijf Visa. Het apparaat ziet er goed uit maar het is niet uitgesloten dat deze niet betrouwbaar is en duur aan reparatiekosten. Voor een goede televisie zonder mankementen heeft Boris 400 euro over, maar voor een slechte televisie hooguit 200 euro. Verder gaat Boris er vanuit dat de kans op een prima televisie 50% is. Anderzijds kent het bedrijf Visa de televisie wel: voor een goed apparaat wil Visa tenminste 300 euro hebben, terwijl een televisie met mankementen wordt verkocht voor iedere geboden prijs vanaf 100 euro. Het bedrijf kan voor de televisie een lage prijs van 200 euro of een hoge prijs h ergens tussen de 300 en 400 euro vragen. Deze waarde h is van tevoren bekend bij Boris, die de televisie zeker zal kopen indien Visa de lage prijs vraagt maar van de koop kan afzien als de vraagprijs h is.

(a) Bij twee verschillende waarden van h bestaat er een PBE (perfect Bayesiaans evenwicht) in zuivere strategieën. Bepaal deze waarden voor h en bijbehorend evenwicht.

(b) Voor $300 \leq h \leq 400$ bestaat er een PBE in gemengde strategieën. Om een dergelijk evenwicht te construeren heb je drie kansen nodig, die allemaal van h afhankelijk zijn. Wat is de betekenis van deze kansen? Bereken dit evenwicht in gemengde strategieën.

Oplossing:

(a) Geval 1: Stel er bestaat een *pooling* evenwicht. Dan dus vraagt Visa in alle gevallen ofwel het hoge bedrag h ofwel 200 euro. Dit laatste kan niet het geval zijn omdat Boris dan altijd zal kopen hetgeen slecht is indien Visa een goede televisie bezit. Stel dus dat Visa in alle gevallen h vraagt. Als $h > 300$, dan zal Boris niet kopen omdat zijn verwachte opbrengst $\frac{1}{2} \cdot 400 + \frac{1}{2} \cdot 200 = 300 < h$. Als Boris niet koopt, dan is het voor Visa met een slechte televisie beter de lage prijs te vragen. Conclusie: $h = 300$. In dat geval koopt Boris de televisie en levert de maximale opbrengst voor Visa. Dit is een pooling evenwicht. Samenvattend, voor $h = 300$ hebben we het evenwicht:

$$\text{Visa: } \begin{cases} \tau_{goed} \to h \\ \tau_{slecht} \to h \end{cases} \qquad \text{Boris: } \begin{cases} h \to \text{kopen} \\ 200 \to \text{kopen} \end{cases}$$

Geval 2: Stel er bestaat een *separating* evenwicht. Dan verschillen de prijzen voor de twee kwaliteiten televisie. Duidelijk is dat Visa met een goede televisie de hoge prijs vraagt en Visa met de slechte televisie de lage prijs. Boris koopt bij prijs $h < 400$ en in zo'n geval kan Visa maar beter ook h vragen voor de slechte televisie. Dus een separating evenwicht is alleen mogelijk bij de hoogst mogelijke prijs $h = 400$. In dat geval koopt Boris in evenwicht de televisie niet bij vraagprijs h (anders is het beter voor Visa met een slechte televisie om h te vragen). Dus voor $h = 400$ hebben we het evenwicht waarbij

$$\text{Visa: } \begin{cases} \tau_{goed} \to h \\ \tau_{slecht} \to 200 \end{cases} \qquad \text{Boris: } \begin{cases} h \to \text{niet kopen} \\ 200 \to \text{kopen} \end{cases}$$

(b) Stel nu $300 < h < 400$. Om een PBE te berekenen zijn drie kansen nodig:

- de kans λ dat Visa h vraagt voor een slechte televisie,
- de kans μ dat Boris de televisie koopt als de prijs h is, en
- de kans ρ dat de televisie goed is als de prijs h is.

Dan moet in een PBE in gemengde strategieën gelden dat (*i*) Visa met een slechte televisie maakt het niet uit of 200 of h de vraagprijs is, d.w.z.

$$(1-\lambda)\,100 = \lambda\,(\mu h + (1-\mu)\,0) = \lambda\mu h \tag{6}$$

(*ii*) Boris is indifferent tussen kopen en niet kopen, d.w.z.

$$\rho\mu\,(400-h) + (1-\rho)\,\mu\,(200-h) = 0 \tag{7}$$

(*iii*) *Bayesian updating*, d.w.z.

$$\rho = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda} = \frac{1}{1+\lambda}. \tag{8}$$

Stel bijvoorbeeld $h = 350$. Dan volgt uit (7) voor $\mu \neq 0$ dat $\rho = \frac{3}{4}$ en dus uit (8) volgt dan $\lambda = \frac{1}{3}$, waarmee uit vergelijking (6) volgt dat $\mu = \frac{4}{5}$.