Inleiding Speltheorie - 25 januari 2006

Opgave 1

a. Anna en Bert zijn met de auto van Anna naar een feestje. Anna kiest wie de auto terug zal rijden. Als de aangewezen bestuurder weinig drinkt zal de uitkomst 'goed' zijn, met de waarde van 2 voor beiden. Als de bestuurder daarentegen (te) veel gedronken heeft is de uitkomst 'slecht', met de waarde 0 voor de bestuurder en 1 voor de meerijder.

- Geef deze situatie weer als een uitgebreid spel Γ. Bepaal alle deelspelperfecte evenwichten van Γ.
- Bepaal de gereduceerde strategische vorm G van dit spel. Vind alle evenwichten van G (in zuivere en/of gemengde strategiëen).
- Welke strategieën zijn rationaliseerbaar? Welke profilen blijven over na de successieve eliminatie van alle zwak gedomineerde strategieën?

b. De situatie is zoals daarnet met het verschil dat er nu de kans van 0.1 bestaat dat een sobere bestuurder het 'slecht' resultaat bereikt.

- Bepaal alle deelspelperfecte evenwichten in dit spel met fouten. Welke profilen blijven nu over na de successieve eliminatie van alle zwak gedomineerde strategieën?
- Kan je een verklaring bedenken voor de verschillen tussen de oplossingen van beide spellen.

Opgave 2 Voor een gegeven strategisch spel G is $G(2)$ het uitgebreide spel waarin G twee keer achter elkaar gespeeld wordt. De uitkomst van de eerste ronde is bekend voordat de tweede ronde begint. De uitbetalingen zijn de sommen van de resultaten van beide ronden.

a Neem G met de volgende uitbetalingen

	L	R
T	3, 2	2, 3
B	0, 1	1, 0

- Bewijs dat in $G(2)$ een uniek deelspelperfect evenwicht bestaat.
- Vind een niet deespelperfect evenwicht dat begint met (T, L) in de eerste ronde.

b Neem H met de uitbetalingen van de *Havik & Duif*

	L	R
T	5, 5	2, 6
B	6, 2	0, 0

- Bepaal alle Nash evenwichten van H. In het algemeen is het niet zeker dat zelfs de rationale spelers een evenwichtsprofiel van H zullen volgen. Noem een paar situaties waarin we kunnen verwachten dat de spelers wel een evenwichtsprofiel zullen realiseren.

- Bewijs dat in $H(2)$ tenminste 81 verschillende deelspelperfecte evenwichten zijn. Vind een deelspelperfect evenwicht van $H(2)$ dat begint met (T, L).

Opgave 3 In periode 0 consumeert speler $i = 1, .., N$ de hoeveelheid c_i van de gehele voorraad van omvang 1. Wat hiervan over is, wordt geïnvesteerd en in periode 1 is voor de consumptie beschikbaar $N\sqrt{1-C}$, met $C = \sum_{i=1}^{i=N} c_i$. Deze hoeveelheid wordt gelijk verdeeld en in periode 1 volledig opgegeten.

De nutsfunctie van speler i is $u_i = \ln c_i + \delta_i \ln \sqrt{1-C}$, voor $i = 1, ..., N$, met de discontofactoren $0 < \delta_1 < ... < \delta_N < 1$.

a Stel de eerste orde voorwaarden voor het evenwicht van het bijbehorend strategisch spel. Welke speler consumeert in evenwicht het meest?

b Bepaal het verband dat in evenwicht moet gelden tussen de totale consumptie C en de grootheid $D = \sum_{i=1}^{i=N} \delta_i^{-1}$. Bereken C^* en $(c_1^*, .., c_N^*)$.

Opgave 4 De prijs p van een object die de verkoper waardeloos vindt en waarvoor de koper bereidt is maximaal 1 te betalen, wordt overeengekomen in de onderhandelingen waarin beiden om de beurt een voorstel doen. De koper doet het eerste bod, na een afwijzng is de verkoper aan de beurt, enz. Er is geen tijdlimiet en beide spelers hanteren dezelfde discontofactor $\delta < 1$.

De nutsfunctie van de koper is $u(p) = \sqrt{1-p}$, van de verkoper $v(p) = p$.

a Geef in het kort aan hoe een deelspelperfect evenwicht van dit spel gevonden kan worden.

b Bereken de prijs p^* die overeengekomen zal worden in het unieke deelspelperfect evenwicht. Voor welke waarde van δ geldt $p^* = \frac{1}{2}$?