FACULTEIT ECONOMIE EN BEDRIJFSKUNDE
Afdeling Kwantitatieve Economie

Inleiding Speltheorie, tentamen **9–12 uur, vrijdag 12 juni 2009**

Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven die verspreid zijn over 2 vellen papier. In totaal zijn er 52 punten te verdienen. Zie hieronder de normering per onderdeel. Een maximaal aantal punten wordt alleen toegekend indien er sprake is van een gemotiveerd en juist antwoord.

Normering									
1a	3	**2**a	3	**3**a	2	**4**a	3	**5**a	3
b	3	b	3	b	3	b	2	b	5
c	3			c	3	c	4	c	4
				d	1	d	4		
						e	3		

Het cijfer T wordt bepaald als $\min\{10, \frac{1}{5} \cdot \text{score}\}$. Indien het cijfer minstens 5.5 is ben je geslaagd voor dit vak.
Voor dit vak is een *bonusregeling van kracht*. Indien $T \geq 5.0$ wordt het eindcijfer E bepaald als:

$$E = (1 - \frac{B}{100})T + \frac{B}{10},$$

waarbij B de te behalen bonus voorstelt. De bonus is alleen deze eerste kans geldig en komt hierna te vervallen.

Opgave 1

(a) Geef de definitie van Nash evenwicht voor een n-persoons strategisch spel.

Gegeven is een 2×2 bi-matrix spel G met gemengde uitbreiding Γ.

(b) Stel dat van de beste antwoordencorrespondenties in Γ voor speler 1 en 2 bekend is dat

$$(y, 1-y) \in B_2((y, 1-y)) \text{ voor alle } y \in [0,1]$$
$$(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \in B_1((y, 1-y)) \text{ voor alle } y \in [0,1].$$

Welke informatie geeft dit over de verzameling van mogelijke Nash evenwichten in Γ, $NE(\Gamma)$?

(c) Geef een spel G waarvoor $NE(\Gamma) = \{((1,0),(y,1-y)) \mid y \in [0, \frac{1}{4}]\}$.

Uitwerking Opgave 1

(a) Standaard, zij $G = \langle N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\rangle$ een spel in strategische vorm met spelerverzameling $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Dan is $a^* = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ een Nash evenwicht van G als voor iedere $i \in N$ geldt dat

$$u_i(a_i^*, a_{-i}^*) \geq u_i(a_i, a_{-i}^*) \text{ voor alle } a_i \in A_i.$$

.

(b) Als $(y, 1-y) \in B_1((y, 1-y))$ voor $y \in (0,1)$ betekent in het bijzonder dat ten opzichte van $(y, 1-y)$ voor alle $y \in (0,1)$ beide acties voor speler 1 even goed zijn. Merk op dat – met A als payoff matrix voor 1 – de payoffs voor speler 1 in Γ gegeven worden door

$$U_1(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1^\top A \sigma_2.$$

Deze afbeelding is continu in zowel de strategie van speler 1 als van speler 2. Dus geldt dat voor alle $y \in [0,1]$

$$U_1((1,0),(y,1-y)) = U_1((0,1),(y,1-y)).$$

Dit betekent dat alle payoffs in A hetzelfde zijn.

(c) Vergelijkbaar met een eerdere opdracht. Hier is de enige mogelijkheid dat speler 2 een zwak dominante strategie heeft. Voor speler 1 moeten we voor elkaar boksen dat wanneer speler 2 met kans 1 de eerste kolom kiest, speler 1 de tweede rij kiest, en andersom, wanneer speler 2 met kans 1 de tweede kolom kiest dat dan speler 1 de eerste kolom met kans 1 kiest (waarom?). Het omslagpunt voor speler 1 wordt gegeven door kans $q = \frac{1}{4}$ op de eerste kolom. Neem bijvoorbeeld het matrix spel:

	L	R
T	$12, 0$	$0, 1$
B	$0, 1$	$4, 1$

Opgave 2

Gegeven is een bepaalde hoeveelheid Q van een hernieuwbaar goed, dat over twee perioden wordt genuttigd door n spelers. De spelers geven ieder voor zich en onafhankelijk aan welke positieve hoeveel van het goed ze in de eerste beurt willen nuttigen. Het profiel van individuele consumpties in beurt 1 wordt dan beschreven door $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, waarbij $x_i > 0$ de consumptie door speler i voorstelt. De overgebleven hoeveelheid regenereert dan tot

$$Q' = \lambda(Q - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n))$$

eenheden, waarbij $\lambda > 1$ een gegeven constante is. Deze hoeveelheid Q' wordt in beurt 2 gelijk onder de spelers verdeeld. Het nut van een speler i, u_i, als het aantal genuttigde eenheden in beurt 1 en 2 gegeven wordt door respectievelijk x_i en y_i is gelijk aan

$$u_i = \ln x_i + \ln y_i.$$

(a) Het hierboven beschreven spel heeft een uniek Nash evenwicht in zuivere strategiën. Bepaal deze.

(b) Bepaal de maximale sociale welvaart als deze gemeten wordt als de som van de individuele nutten. Hoe verhoudt zich de welvaart in het sociaal optimum ten opzichte van de welvaart in het Nash evenwicht bij een immer toenemend aantal spelers?

Uitwerking Opgave 2

(a) Schrijf $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Dan wordt het nut van speler i gegeven door

$$u_i(x_1, \ldots, x_n) = \ln x_i + \ln(\tfrac{\lambda}{n}(Q - \bar{x}) = \ln x_i + \ln(\frac{\lambda}{n}) + \ln(Q - \bar{x}).$$

Voor speler i luidt de eerste orde conditie

$$\frac{\partial}{\partial x_i} u_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x_i} - \frac{1}{Q - \bar{x}} = 0.$$

Dus volgt voor alle i dat $x_i = Q - \bar{x}$. Sommeren over alle i levert $\bar{x} = n(Q - \bar{x})$ en dus dat $\bar{x} = \frac{n}{n+1}Q$. Hieruit volgt $x_i = Q/(n+1)$. Check verder de tweede orde conditie:

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 x_i} u_i(x^*) = -\frac{1}{x_i^2} - \frac{1}{(Q - \bar{x})^2}\bigg|_{x = x^*} < 0.$$

Dus wordt het evenwicht gegeven door x^* waarbij $x_i^* = \frac{Q}{n+1}$.

(b) Om het sociaal optimum te bepalen maximaliseren we de functie

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i + n \ln \frac{\lambda}{n} + n \ln(Q - \bar{x}).$$

De eerste orde condities leveren – vergelijkbaar met hierboven – $nx_i = Q - \bar{x}$ en dus met sommatie over alle i dat $\bar{x} = Q - \bar{x}$ oftewel $\bar{x} = \frac{1}{2}$. Tweede orde conditie: Dus de sociale welvaartsfunctie U wordt gemaximaliseerd in $\tilde{x}$ waar $\tilde{x}_i = \frac{Q}{2n}$ voor alle $i = 1, 2, \ldots, n$. Merk op dat met een beetje herschrijven volgt dat

$$U(x^*) - U(\tilde{x}) = n \ln \frac{4n}{(n+1)^2} \to -\infty$$

wanneer $n \to \infty$. Het Nash evenwicht wordt steeds inefficiënter naarmate er meer spelers zijn.

Opgave 3

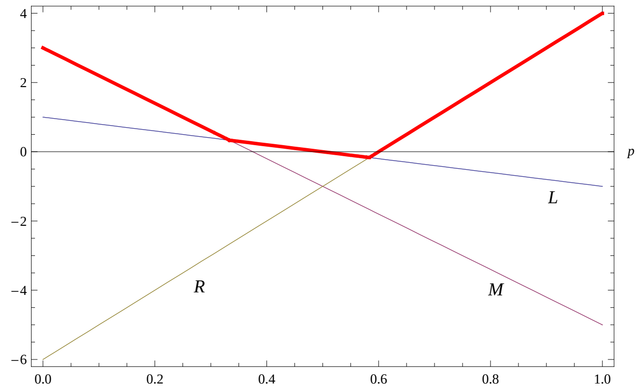
Gegeven is het 2-persoons strategisch spel G : speler 1 heeft acties T en B, speler 2 heeft acties L, M, en R en de uitbetalingen bij de verschillende actiecombinaties worden gegeven door

	L	M	R
T	$1, -1$	$-4, 4$	$-3, 3$
B	$-1, 1$	$6, -6$	$\alpha, -5$

De gemengde uitbreiding van G wordt aangeduid met Γ.

(a) Voor welke waarden van α is G een strikt competitief spel? Motiveer je antwoord.

(b) Laat zien dat wanneer $\alpha \neq 5$, de gemengde uitbreiding Γ niet strikt competitief is. Motiveer je antwoord.



Figuur 1: *Payoff* $U_2(\cdot \mid p)$ *voor* $p \in [0, 1]$.

Zij nu $\alpha = 5$, waarmee zowel G als Γ nulsomspelen zijn.

(c) Bepaal de verzameling evenwichten in gemengde strategieën, $NE(\Gamma)$.

(d) Bepaal de waarde $v(\Gamma)$.

Uitwerking Opgave 3

(a) G is strikt competitief dan en slechts dan als voor alle actieprofielen $(a_1, a_2), (a_1', a_2')$ geldt dat

$$u_1(a_1, a_2) \leq u_1(a_1', a_2') \Leftrightarrow u_2(a_1, a_2) \geq u_2(a_1', a_2').$$

Neem nu $(a_1, a_2) = (B, R)$. Dan moet in een strikt competitief spel dus voor alle (a_1', a_2') gelden dat

$$\alpha \geq u_1(a_1', a_2') \Leftrightarrow -5 \geq u_2(a_1', a_2').$$

Voor $(a_1', a_2') \neq (B, R)$ geldt $u_1(a_1', a_2') = -u_2(a_1', a_2')$ en dus komen deze voorwaarden neer op

$$u_1(a_1', a_2') \leq \alpha \Leftrightarrow u_1(a_1', a_2') \leq 5$$

voor alle $(a_1', a_2') \neq (B, R)$. Dit geldt voor alle $\alpha \in (1, 6)$.

(b) Γ is strikt competitief dan en slechts dan als voor alle actieprofielen $(\sigma_1, \sigma_2), (\sigma_1', \sigma_2')$ geldt dat

$$U_1(\sigma_1, \sigma_2) \leq U_1(\sigma_1', \sigma_2') \Leftrightarrow U_2(\sigma_1, \sigma_2) \geq U_2(\sigma_1', \sigma_2').$$

Neem nu $\sigma_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Dan geldt voor $\alpha \neq 5$ dat $U_2((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), M) = U_2((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), R)$ en

$$U_1((\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}), M) = 1 \neq -\tfrac{3}{2} + \tfrac{\alpha}{2} = U_1((\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}), R),$$

wat dus strikte competitiviteit weerspreekt.

(c) In Figuur 1 wordt duidelijk wat er aan de hand is.

In evenwicht spelen beide spelers *maximin*, wat betekent dat speler 1 precies díe p kiest waarvoor de maximale uitbetaling aan speler 2 minimaal is. De rode lijn geeft de maximale uitbetaling aan speler 2 weer als functie van p, de kans waarmee speler 1 actie T kiest. Dus in evenwicht geldt

$$U_2(p, L) = U_2(p, R) \leftrightarrow 1 - 2p = 10p - 6 \Leftrightarrow p = \tfrac{7}{12}.$$

Hieraan zien we ook dat speler 2 in evenwicht alleen randomiseert over L en R. We bepalen de kans q dat speler 2 actie L kiest:

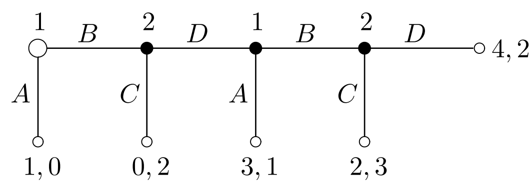
$$U_1(T \mid q) = U_2(B \mid q) \Leftrightarrow q - 4(1-q) = -q + 6(1-q) \Leftrightarrow q = \tfrac{5}{6}.$$

Het unieke evenwicht luidt dus $\sigma^* = ((\frac{7}{12}, \frac{5}{12}), (\frac{5}{6}, 0, \frac{1}{6}))$.

(d) Conventie is dat $v(\Gamma) = U_1(\sigma^*)$ (namelijk uit de Minmax Stelling van von Neumann volgt dat uitbetalingen in íeder evenwicht hetzelfde zijn). Dus hier: $v(\Gamma) = U_1(T, (\frac{5}{6}, 0, \frac{1}{6})) = \frac{5}{6} \cdot 1 - 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. Het spel is voor speler 1 dus iets voordeliger dan voor speler 2.

Opgave 4

Beschouw de spelboom bij de volgende versie van het *Centipede Game*



(a) Geef de strategische vorm bij dit spel in extensieve vorm. Is dit spel via dominantie oplosbaar?

(b) Bepaal het unieke deelspelperfecte evenwicht.

Stel nu dat speler 2 bij het realiseren van zijn actie C fouten maakt. Precieser, met kans $p > 0$ resulteert een keuze voor actie C toch uit in actie D. Speler 1 weet dat 2 fouten maakt, maar niet óf deze gemaakt is; speler 1 observeert alleen de acties. Speler 2 weet wanneer de actie niet goed is uitgevoerd.

(c) Bepaal een spelboom bij deze situatie, waarbij je de fout modeleert met behulp van een *chance node*. Neem hiervoor goed wat ruimte.

(d) Hoeveel strategieën hebben beide spelers?

(e) Hoe groot moet p minimaal zijn opdat er een Nash evenwicht bestaat waarbij speler 1 altijd B speelt?

Uitwerking Opgave 4

(a) De strategische vorm wordt gegeven door

	CC	CD	DC	DD
AA	$1,0$	$1,0$	$1,0$	$1,0$
AB	$1,0$	$1,0$	$1,0$	$1,0$
BA	$0,2$	$0,2$	$3,1$	$3,1$
BB	$0,2$	$0,2$	$2,3$	$4,2$

Dit spel is via (zwakke) dominantie oplosbaar. Elimineer achtereenvolgens DD, BB, DC, BA. De overgebleven strategieëncombinaties leveren allen dezelfde payoffs op – corresponderend met het spelverloop waarbij speler 1 meteen stopt.

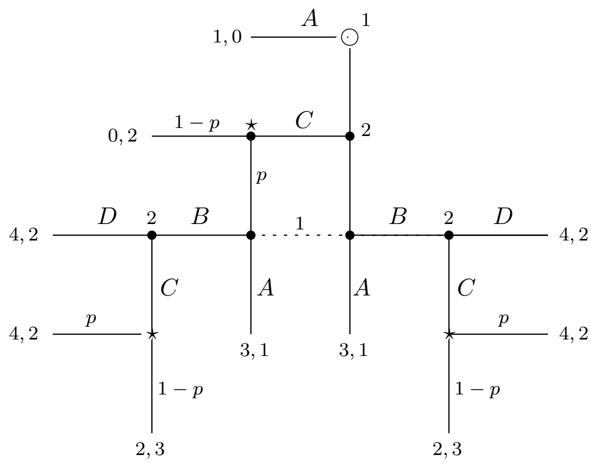
(b) De spelboom zal er ongeveer als in Figuur 2 uit moeten zien. Merk de informatieverzameling van speler 1 op, die met een gestippelde lijn is aangegeven. Speler 1 weet hier niet of hij aan zet is ondanks een fout van speler 2 of niet.

(c) Uit Figuur 2: (1) speler 1 heeft twee informatieverzamelingen heeft met ieder 2 acties dus $2^2 = 4$ strategieën, als voorheen, (2) speler 2 heeft 3 informatieverzamelingen met ieder 2 acties en dus 2^3 strategieën. Speler 2 heeft meer mogelijkheden aangezien hij anders kan reageren op een al dan niet gelukte actie C.

(d) De strategische vorm bij het spel met fouten wordt gegeven in Figuur 3. Merk op dat BB tot een evenwicht kan behoren als geldt dat

$$2 + 2p \geq 3 \text{ en } \max\left\{3 - p, 2 + p - p^2\right\} \geq 2.$$

Dit geldt voor alle $p \geq \frac{1}{2}$. Evenwichten zijn dan bijvoorbeeld: $(BB, DCC), (BB, DDC)$. Alleen als $p = 1$ dan zijn er ook nog $(BB, CCC), (BB, CCD)$.



Figuur 2: *De spelboom met* chance nodes – *aangegeven met* $\star$.

	CCC	CCD	CDC	CDD	DCC	DCD	DDC	DDD
AA	$1,0$	$1,0$	$1,0$	$1,0$	$1,0$	$1,0$	$1,0$	$1,0$
AB	$1,0$	$1,0$	$1,0$	$1,0$	$1,0$	$1,0$	$1,0$	$1,0$
BA	$3p,2-p$	$3p,2-p$	$3p,2-p$	$3p,2-p$	$3,1$	$3,1$	$3,1$	$3,1$
BB	$2p\,(1+p)\,,2+p-p^2$	$2p\,(1+p)\,,2+p-p^2$	$4p,2$	$4p,2$	$2+2p,3-p$	$4,2$	$2+2p,3-p$	$4,2$

Figuur 3: *De strategische vorm met verwachte uitbetalingen.*

Opgave 5

Beschouw het spel in zuivere strategieën G waarbij de payoffs voor speler 1 (rijspeler) en speler 2 (kolomspeler) gegeven worden door

	L	M	R
T	$5,5$	$0,7$	$0,2$
C	$6,0$	$3,4$	$0,1$
B	$1,1$	$1,0$	$1,1$

We bekijken nu $G^{\delta}(2)$, het herhaalde spel G waarbij de payoffs in ronde 2 verdisconteerd worden met factor $\delta \in (0,1)$. Dus de payoffs van speler i worden gegeven door $\pi_i = \pi_i^1 + \delta\pi_i^2$, waarbij π_i^k de payoffs zijn in ronde k.

(a) Hoeveel strategieën hebben de spelers?

(b) Er bestaat een getal δ^* zodat precies wanneer $\delta \geq \delta^*$ er een deelspelperfect evenwicht bestaat waarbij in de eerste ronde (T,L) wordt gespeeld. Bepaal δ^* en zulke deelspelperfecte evenwichten in $G^{\delta}(2)$.

(c) Zijn er deelspelperfecte evenwichten in $G^{\delta}(2)$ wanneer $\delta < \delta^*$? Zo ja, bepaal deze.

Uitwerking Opgave 5

(a) Het spelverloop van ronde 1 wordt geopenbaard alvorens verder te spelen. Dus afhankelijk van het spelverloop in ronde 1 hebben de spelers in ronde 2 ieder 3 acties. Dus is het totaal aantal strategieën gelijk aan $3 \cdot 3^9 = 3^{10}$.

(b) In een deelspelperfect evenwicht wordt per definitie in ieder deelspel een Nash evenwicht gespeeld. Dus in dit geval geeft dat een restrictie voor het spelverloop in ronde 2: hier wordt óf (C,M), óf (R,R) gerealiseerd, de twee Nash evenwichten in zuivere strategieën. In het bijzonder hebben we dus een *goed* en een *slecht* evenwicht, en bestaat de mogelijkheid tot straffen. Dit is ook nodig, want (T,L) is geen evenwicht en lokt spelers uit om in de eerste ronde hiervan af te wijken. Een deelspelperfect evenwicht waarbij (T, L) in ronde 1 gespeeld wordt bestaat alleen wanneer de straf op afwijken groot genoeg is. De volgende strategieën zouden optimaal moeten zijn:

- Speler 1:

$$s_1(h) = \begin{cases} T & \text{als } h = \varnothing \\ C & \text{als } h = (T, L) \\ B & \text{in alle andere gevallen} \end{cases}$$

- Speler 2:

$$s_2(h) = \begin{cases} L & \text{als } h = \varnothing \\ M & \text{als } h = (T, L) \\ R & \text{in alle andere gevallen} \end{cases}$$

Merk op dat de payoff voor speler 1 en 2 gegeven wordt door

$$\pi_1(s_1, s_2) = 5 + 3\delta, \pi_2(s_1, s_2) = 5 + 4\delta.$$

Het strategieënprofiel (s_1, s_2) is deelspelperfect als het de eenafwijkingseigenschap heeft. Speler 1 zou alleen kunnen profiteren van een afwijking in ronde 1 naar C, met als spelresultaat $6+\delta$, namelijk in ronde 2 wordt dan (B, R) gespeeld. Er moet in ieder geval gelden dat $5 + 3\delta \geq 6 + \delta$ oftewel $\delta \geq \frac{1}{2}$. Een soortgelijke redenering voor speler 2 levert de conditie $5 + 4\delta \geq 7 + \delta$, oftewel $\delta \geq \frac{2}{3}$. Kortom: straffen kan alleen maar als beide spelers de toekomst serieus genoeg nemen, met een hoge δ. Dus neem $\delta^* = \frac{2}{3}$, dan is het bovenbeschreven profiel deelspelperfect.

(c) Als $\delta < \frac{2}{3}$ dan resten geen andere evenwichten dan die leiden tot het spelen van tweemaal een Nash evenwicht.

EINDE TENTAMEN INLEIDING SPELTHEORIE 12 JUNI 2009
