Inleiding Speltheorie - 3 november 2005

De totale waarde van alle opgaven is 120. Alleen de beste onderdelen tellen.

Opgave 1 G is een spel met 2 spelers. Beiden beschikken over twee acties, U en D voor speler 1, L en R voor speler 2, en maximaliseren hun verwachte uitbetalingen. We beschouwen hun beste antwoorden in gemengde strategieën, x is de kans dat speler 1 U kiest, y de kans dat speler 2 actie L speelt.

a. Schets de beste antwoordfunctie B_1 van speler 1 in de volgende situaties, elke grafiek in een aparte schets

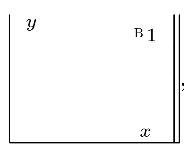
- D is sterk gedomineerd door U,
- D is zwak gedomineerd door U,
- U is het beste antwoord op L, D is het beste antwoord op R.

b. Schets de beste antwoordfuncties van beide spelers in de volgende situaties, elke grafiek in een aparte schets

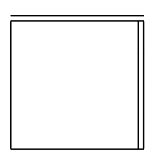
- er is een uniek evenwicht, en wel in zuivere strategieën,
- er is een uniek evenwicht, en wel in gemengde strategieën,
- er zijn twee evenwichten,
- er zijn drie evenwichten,
- er zijn oneindig veel evenwichten.

Oplossing

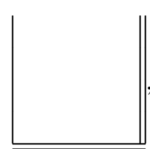
a **(i)**



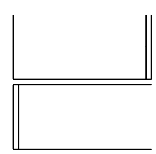
, **(ii)**



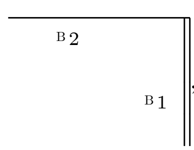
of



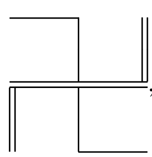
, **(iii)**



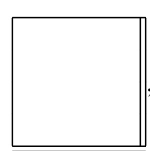
b **(i)**



, **(ii)**

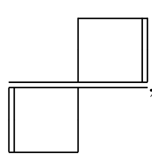


, **(iii)**

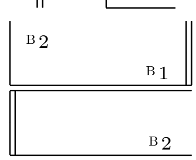


,

(iv)



, **(v)**



Opgave 2 Γ is een nulsomspel met $S_1 = \{T, B\}$, $S_2 = \{L, M, R\}$ en de uitbetalingen voor speler 1 gegeven in de onderstaande tabel

	L	M	R
T	0	6	4
B	5	1	4

a. Bepaal de maxmin en minmax waarden van het spel in zuivere strategieën. Wat kan je nu zeggen over de evenwichten van Γ?

b. Bereken de maxmin en minmax in gemengde strategieën. Maak gebruik van deze berekeningen om de evenwichten van Γ te bepalen.

c. Welke acties van de spelers 1 en 2 zijn gedomineerd?

Welke acties zijn rationaliseerbaar? en waarom?

Oplossing

a. In zuivere strategieën geldt

$\max\limits_{S_1} \min\limits_{S_2} u_1 = \max\ \{0, 1\} = 1 < \min\limits_{S_2} \max\limits_{S_1} u_1 = \min\ \{5, 6, 4\} = 4.$

In Γ is er geen evenwicht in zuivere strategieën omdat $\max\min \neq \min\max$.

b. Zij π de kans waarmee speler 1 haar actie T gebruikt. Voor elke π geldt

$$\min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} U_1(\pi, \sigma_2) = \min_{s_2 \in S_2} U_1(\pi, s_2)$$

We hebben achtereenvolgens:

$$U_1(\pi, L) = 5 - 5\pi,\ U_1(\pi, M) = 1 + 5\pi,\ U_1(\pi, R) = 4.$$

$$\min_{\{L,M,R\}} U_1(\pi, s_2) = \begin{cases} 1 + 5\pi, & \text{voor } 0 \leq \pi \leq \frac{2}{5}, \\ 5 - 5\pi, & \text{voor } \frac{2}{5} \leq \pi \leq 1. \end{cases}$$

$$\max_{\Delta(S_1)} \min_{\Delta(S_2)} U_1 = \max_{\pi} \min_{S_2} U_1 = U_1\left(\tfrac{2}{5}, L\right) = U_1\left(\tfrac{2}{5}, M\right) = 3.$$

In gemengde strategieën geldt vanwege de maxminstelling:

$$\max_{\Delta(S_1)} \min_{\Delta(S_2)} U_1 = \min_{\Delta(S_2)} \max_{\Delta(S_1)} U_1 = 3.$$

Uit de voorafgaande volgt ook dat $\sigma_1^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$ de unieke evenwichtsstrategie van speler 1 is. R is geen beste antwoord op σ_1^*, en zal dus niet door speler 2 in een evenwicht gebruikt worden. $\sigma_2^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ blijkt nu de unieke evenwichtsstrategie van speler 2 te zijn.

c. Actie R is nooit het beste antwoord van speler 2 en is dus ook niet rationaliseerbaar. Evengoed is R sterk gedomineerd door de gemengde strategie $\frac{1}{2} * L + \frac{1}{2} * M$. Overige strategieën van beide spelers zijn rationaliseerbaar omdat ze met een positieve kans in een evenwicht gespeeld worden.

Opgave 3 Alle n inwoners van het dorp zijn op de hoogte van een misdrijf. De politie heeft minimaal één getuige nodig. Iedereen moet zelf beslissen of zij/hij de politie zal bellen. Het rapporteren kost in nutstermen 1 en het is voor iedereen 2 waard als de politie geïnformeerd word.

a. Stel $n = 3$ en bepaal alle evenwichten, mogelijk in gemengde strategieën.

b. Voor elke n bestaat er een uniek symmetrisch evenwicht. Laat zien dat de kans dat iemand de politie belt daalt naarmate het dorp groter wordt.

Oplossing

a. In zuivere strategieën zijn er drie evenwichten: (B, N, N) , (N, B, N) , (N, N, B) .

Er zijn ook drie evenwichten waarin één dorpsinwoner niet belt terwijl de twee anderen bellen met de kans van $\frac{1}{2}$ ieder.

In een evenwicht waarin iedereen met een positieve kans belt geldt

$$1 = 2\left(1 - \left(1 - \pi_1\right)\left(1 - \pi_2\right)\right) = 2\left(1 - \left(1 - \pi_2\right)\left(1 - \pi_3\right)\right) = 2\left(1 - \left(1 - \pi_1\right)\left(1 - \pi_3\right)\right)$$

waarbij π_i de kans is dat inwoner i de politie belt.

De unieke oplossing is $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.3$.

b. In een dorp met $n \geq 2$ vinden we op dezelfde manier het uniek symmetrisch evenwicht waarin elke inwoner belt met de kans $1 - 2^{\frac{1}{1-n}}$.

De kans dat de politie gebeld wordt is dan $\beta_n = 1 - 2^{\frac{n}{1-n}}$.

We hebben $\beta_2 = 0.75,\ \beta_3 = 0.65, ...$ met $\beta_n \downarrow \frac{1}{2}$.

Opgave 4 In het *Centipede* spel ligt €5 op tafel. Speler 1 kan €4 daarvan pakken, €1 voor de andere achterlaten en daarmee het spel beëindigen, of de zet aan speler 2 overdragen in welk geval het bedrag verdubbelt. Speler 2 kan op zijn buurt €8 pakken, of het geld opnieuw laten verdubbelen en de zet terug aan speler 1 geven die weer over soortgelijke opties beschikt. Er zijn maximaal 6 ronden. Als speler 2 op zijn derde beurt het geld nog steeds laat liggen krijgt speler 1 €256 uitbetaald en hij zelf slechts €64.

a. Geef een formele beschrijving en schets de boom van dit *Centipede* spel.

b. Geef een volledige specificatie van het unieke deelspelperfecte evenwicht.

Bewijs dat in elk Nash evenwicht speler 1 het spel onmiddelijk beëindigt.

c. In de experimenten laten de spelers het spel in het algemeen een paar ronden voortduren. Bijna niemand pakt het geld bij de eerste gelegenheid. Verklaar dit gedrag met behulp van kansen op fouten of op irrationaliteit.

Oplossing

a.

Geschiedenis	Speler	Acties / Uitbetalingen
$\varnothing,\ D_1D_2,\ D_1D_2D_3D_4$	**1**	$\{S_1, D_1\}\,,\ \{S_3, D_3\}\,,\ \{S_5, D_5\}$
$D_1,\ D_1D_2D_3,\ D_1D_2D_3D_4D_5$	**2**	$\{S_2, D_2\}\,,\ \{S_4, D_4\}\,,\ \{S_6, D_6\}$
$S_1,\ D_1D_2S_3,\ D_1D_2D_3D_4S_5$	–	$(4,1)\,,\ (16,4)\,,\ (64,16)$
$D_1S_2,\ D_1D_2D_3S_4,\ D_1D_2D_3D_4D_5S_6$	–	$(2,8)\,,\ (8,32)\,,\ (32,128)$
$D_1D_2D_3D_4D_5D_6$	–	$(256,64)$

b. Zoek in de oplossingen van Osborne op.

c. Zoek in het boek van Osborne op.

Opgave 5 a. Formuleer de *één-afwijking* eigenschap van deelspelperfecte evenwichten. In welke soorten uitgebreide spelen geldt deze eigenschap?

Γ is het oneindig herhaalde *Gevangenen Dilemma* met de discontofactor $\delta < 1$ en de uitbetalingen per periode als in de volgende tabel

	C	D
C	$a,\ a$	$0,\ 3$
D	$3,\ 0$	$1,\ 1$

, met $1 < a < 3$.

De uitbetalingen in Γ zijn de genormaliseerde oneindige sommen van de verdisconteerde uitbetalingen per periode, te weten

$$U_i = (1-\delta)\sum_{t=0}^{t=\infty} \delta^t u_i\left(s_i^t, s_j^t\right)\,,\ \text{voor } i = 1,2,\ \text{met } s_i^t, s_j^t = C \text{ of } D.$$

In de *Pavlov* strategie begint een speler met C en herhaalt haar/zijn eigen actie na C van de andere speler maar wisselt na D van de andere.

b. Constueer een logische machine die de *Pavlov* strategie realiseert.

Voor welke waarden van a en δ is het profiel $(Pavlov, Pavlov)$ een deelspelperfect evenwicht van Γ?

Oplossing

a. Zoek in het boek op.

b.

$$Pavlov: \boxed{\boxed{\mathcal{C}:C}} \underset{(C,D),(D,C)}{\overset{(C,C),(D,D)}{\leftrightarrows}} \boxed{\mathcal{D}:D}.$$

Het profiel $(Pavlov, Pavlov)$ induceert na elke geschiedenis gelijke acties van beide spelers. In $\varnothing$ en na (C,C) of (D,D) dient inderdaad (C,C) gespeeld te worden, terwijl na (C,D) of (D,C) dient (D,D) te volgen. Om te bepalen voor welke a en δ $(Pavlov, Pavlov)$ een deelspelperfect evenwicht van Γ oplevert is het nodig om twee situaties te onderzoeken.

- Beide spelers in $\mathcal{C}$.

  Als beide spelers zich aan het profiel $(Pavlov, Pavlov)$ houden wordt $(C,C) \to (C,C) \to (C,C) \to$ ...gespeeld met de payoff a voor elke speler.

  Na de eenmalige afwijking van speler 1 volgt $(D,C) \to (D,D) \to (C,C) \to (C,C) \to$ ...met de payoff $(1-\delta)(3+\delta) + a\delta^2$ voor speler 1.

  Deze afwijking levert geen verbetering voor speler 1 op als

  $$a \geq (1-\delta)(3+\delta) + a\delta^2.$$

  Dit geldt voor $\frac{3-a}{a-1} \leq \delta < 1$, wat alleen mogelijk is voor $a > 2$.

- Beide spelers in $\mathcal{D}$.

  Als beide spelers zich aan $(Pavlov, Pavlov)$ houden wordt $(D,D) \to (C,C) \to (C,C) \to$ ...gespeeld met de payoff $1-\delta+a\delta$ voor elke speler.

  Na de eenmalige afwijking van speler 1 volgt $(C,D) \to (D,D) \to (C,C) \to (C,C) \to$ ...met de payoff $(1-\delta)(0+\delta) + a\delta^2$ voor speler 1.

  Deze afwijking levert nooit een verbetering voor speler 1 op.