Tentamen Inleiding Speltheorie 29-10-2003

Dit tentamen telt 5 opgaven die in 3 uur moeten worden opgelost. Het maximaal te behalen punten is 110, uitgesplitst naar de verschillende opgaven. Voor het tentamencijfer 10 zijn 100 punten benodigd, en voor een 6 minimaal 55. De punten die per opgave te behalen zijn wordt hieronder aangegeven. Per opgave wordt het maximale aantal punten alleen toegekend indien een vraag juist is beantwoord en voorzien is van een gedegen motivatie. Oplossingen worden na afloop van het tentamen op Blackboard gepubliceerd, en uitslagen volgen in de loop van de volgende week. Veel succes!

Opgave 1 (15)

(a) Geef de definitie van Nash evenwicht voor een spel met 2 spelers.

(b) Geef een voorbeeld van een 2×2 bi-matrix spel met precies drie Nash evenwichten in de gemengde uitbreiding.

(c) Geef een voorbeeld van een behavioristische strategie die niet equivalent is met een gemengde strategie.

Oplossing

(a) Zie dictaat/boek.

(b) Battle of the Sexes is een voorbeeld. Twee Nash evenwichten in zuivere strategieën en een enkel evenwicht in gemengde strategieën.

(c) In het dictaat staat het voorbeeld van een spel met ën enkele speler, speler 1, die twee keer achter elkaar een zet doet. In de eerste informatieverzameling kiest speler 1 tussen L en R en in de tweede informatieverzameling weet speler 1 niet meer wat de eerste zet is geweest, en kiest vervolgens tussen ℓ en r. Speler 1 heeft dus strategieën $L\ell, Lr, R\ell, Rr$. De gemengde strategie waarbij $L\ell$ en Rr beide met een kans $\frac{1}{2}$ gespeeld worden is niet uitkomst-equivalent met een behavioristische strategie.

Opgave 2 (25)
Gegeven is het 2 persoons spel G :

	L	M	R
T	$2,1$	$2,1$	$1,0$
M	$2,2$	$1,1$	$0,2$
B	$1,1$	$1,1$	$2,1$

De gemengde uitbreiding van G noteren we met $\Gamma(G)$.

(a) Bepaal $IEWDS(G)$ en $IEDS(G)$.

(b) Bepaal $NE(G)$.

(c) Laat zien dat $NE(\Gamma(G))$ geen evenwichten in volledig gemengde strategieën bevat.

(d) Zijn er evenwichten in $NE(\Gamma(G))$ die niet zuiver zijn?

Oplossing

(a) Er zijn geen gedomineerde strategieën dus bevat $IEDS(G)$ alle 9 strategieën combinaties. Verder wordt voor (rij) speler 1 strategie M zwak gedomineerd door T, voor (kolom) speler 2 wordt zowel M als R zwak door L gedomineerd. Na ronde 1 van eliminatie blijft het volgende gereduceerde spel over:

	L
T	$2,1$
B	$1,1$

Dan wordt in eliminatie ronde 2 strategie B door L gedomineerd. Conclusie: $IEWDS(G) = \{(T,L)\}$.

(b) Met behulp van een pijlendiagram volgt $NE(G) = \{(T,L),(M,L),(T,M),(B,R)\}$.

(c) In een evenwicht in volledig gemengde strategieën wordt iedere strategie met positieve kans gespeeld. Aan de andere kant geldt ook dat een zwak gedomineerde strategie daarin niet voorkomt. Aangezien beide spelers hier zwak gedomineerde strategieën hebben kan zo'n evenwicht dus niet bestaan.

(d) Als speler 1 T speelt dan is speler 2 indifferent tussen L en M. Een evenwicht is bijvoorbeeld $(L, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0))$ en deze is niet zuiver.

Opgave 3 (20)
Gegeven is het volgende twee perioden *grondstoffen* spel met twee spelers. In ronde 1 is er een hoeveelheid 1 van grondstof Y aanwezig. Spelers 1 en 2 bepalen onafhankelijk van elkaar de hoeveelheid die in beide perioden individueel geconsumeerd wordt. Daarbij kan de totale consumptie de aanwezige hoeveelheid niet overschrijden: als in periode 1 hoeveelheden c_1 en c_2 geconsumeerd worden dan moet gelden $c_1 + c_2 \leq 1$. De grondstof Y regenereert, om precies te zijn komt er, afhankelijk van de hoeveelheid $x = 1 - (c_1 + c_2)$ die na consumptie in periode 1 van Y overblijft, in periode twee een hoeveelheid $10\sqrt{x}$ van Y beschikbaar. Het nut voor speler i bij consumptie van c_i eenheden in periode 1 en c_i' eenheden in periode 2 is voor $i = 1,2$ gelijk aan

$$u_i(c_i, c_i') = \ln(c_i) + \delta \ln(c_i'), \text{ met constante } \delta \in (0,1).$$

(a) Stel speler 2 consumeert ϑ van Y in ronde 1. Bepaal het beste antwoord van speler 1 op ϑ indien gegeven is dat in periode 2 de aanwezige resterende hoeveelheid van Y gelijkelijk onder speler 1 en 2 wordt verdeeld.

(b) Bepaal een symmetrisch evenwicht van dit 2 perioden spel.

(c) Bepaal het sociale optimum, oftewel het maximum van de geaggregeerde nutten

$$U = u_1 + u_2.$$

Oplossing

(a) Stel speler 2 consumeert in periode 1 hoeveelheid ϑ. Speler 1 maximaliseert dan

$$\max_{0<x\leq 1-\vartheta} \ln(x) + \delta \ln(5\sqrt{1-(x+\vartheta)}).$$

De eerste orde conditie luidt

$$\frac{1}{x} - \frac{\delta}{2(1-(x+\vartheta))} = 0.$$

Hieruit volgt $x = \frac{2-2\vartheta}{2+\delta}$. Controleer inderdaad dat $x < 1 - \vartheta$. Bepaal de tweede afgeleide naar x:

$$-\frac{1}{x^2} + \frac{\delta}{2(1-(x+\vartheta))^2} = -\frac{(2+\delta)^2}{(1-\vartheta)^2}\left(\frac{1}{2\delta} - \frac{1}{4}\right) < 0.$$

Dus inderdaad is de gevonden hoeveelheid $x(\vartheta)$ optimaal bij gegeven ϑ.

(b) Uit (a) vinden we in evenwicht dat

$$x(\vartheta) = \frac{2-2\vartheta}{2+\delta}, \vartheta = \frac{2-2x(\vartheta)}{2+\delta}.$$

Dan volgt hieruit dat $x(\vartheta) = \vartheta$ en $\vartheta = \frac{2}{4+\delta}$.

(c) Begin met een optimale verdeling te vinden van de hoeveelheid in periode 2. Stel dat hier na regeneratie nog y eenheden aanwezig is. Omdat het geaggregeerde nut stijgt in de geconsumeerde hoeveelheden geldt $c_1' + c_2' = y$. Het maximaliseringsprobleem voor periode 2 luidt dus

$$\max_{c_1'>0} \ln(c_1') + \ln(y - c_1').$$

De eerste orde conditie levert dan

$$\frac{1}{c_1'} = \frac{1}{y - c_1'},$$

en dus $c_1' = c_2' = \frac{y}{2}$. Kortom in een sociaal optimum wordt de overgebleven hoeveelheid gelijk verdeeld. Om het sociale optimum te berekenen moeten we dus het volgende probleem oplossen:

$$\max_{c_1,c_2>0,c_1+c_2\leq 1} \ln(c_1) + \ln(c_2) + 2\delta \ln(5\sqrt{1-c_1-c_2})$$
$$\max_{c_1,c_2>0,c_1+c_1\leq 1} \ln(c_1) + \ln(c_2) + \delta \ln(1-c_1-c_2) + 2\delta \ln 5.$$

De eerste orde condities luiden nu voor $i = 1, 2$

$$\frac{1}{c_i} - \frac{\delta}{1 - (c_1 + c_2)} = 0.$$

En dus volgt hieruit $c_1 = c_2$ en dan via $1 - 2c_1 = \delta c_1$ komen we tot $c_1 = c_2 = \frac{1}{2+\delta}$. Hieruit volgen $c_1' = c_2' = 5\sqrt{\frac{\delta}{2+\delta}}$.

Opgave 4 (25)
Gegeven is een markt voor een perfekt deelbaar goed Z waarop twee bedrijven, bedrijf 1 en bedrijf 2, actief zijn. Beide bedrijven produceren tegen vaste marginale kosten en de kostenfuncties worden gegeven door $c_1(q_1) = 4q_1$ voor bedrijf 1 en $c_2(q_2) = 2q_2$ voor bedrijf 2. De prijs p voor een eenheid van Z hangt af van de totale hoeveelheid $Q = q_1 + q_2$ die de bedrijven op de markt brengen, en wel door

$$p(Q) = a - Q.$$

Hierbij kan a twee waarden aannemen en wel $a = a_L = 6$ of $a = a_H = 10$. Neem aan dat de bedrijven onafhankelijk van elkaar en gelijktijdig hun productieniveau bepalen en er naar streven hun (verwachte) winst te maximaliseren.

(a) Bepaal de Nash evenwichten in de spelen in strategische vorm in het geval dat de bedrijven de echte waarde van a kennen.

(b) Bepaal het evenwicht in het spel in strategische vorm waarbij de bedrijven de echte waarde van a niet kennen, maar weten dat de kans op a_L resp. a_H gelijk is aan $\frac{1}{4}$ resp. $\frac{3}{4}$.

Veronderstel nu dat de bedrijven de mogelijkheid hebben om marktonderzoek te doen, waaruit de preciese waarde van a blijkt. De kosten van zo'n onderzoek zijn 1. Wanneer een bedrijf geen onderzoek laat uitvoeren kent deze alleen de kansen op a_L en a_H en deze zijn $\frac{1}{4}$ resp. $\frac{3}{4}$.

(c) Bereken het Bayesiaanse evenwicht in het hoeveelheden spel waarbij alleen bedrijf 1 het marktonderzoek laat uitvoeren, en bedrijf 2 hiervan op de hoogte is.

(d) Motiveer met behulp van de uitkomsten bij onderdelen (a)–(c) waarom bedrijf 1 wel, of juist niet een marktonderzoek moet uitvoeren.

Oplossing

(a) In het geval a bekend is verkeren we in een normaal Cournot spel. Stel $a = a_L = 6$, dan luiden de winstfuncties

$$u_1(q_1, q_2) = (2 - (q_1 + q_2))q_1,$$
$$u_2(q_1, q_2) = (4 - (q_1 + q_2))q_2.$$

De eerste orde voorwaarden luiden

$$\frac{\partial}{\partial q_1} u_1(q_1, q_2) = 2 - 2q_1 - q_2 = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial q_2} u_2(q_1, q_2) = 4 - q_1 - 2q_2 = 0.$$

Hieruit volgen dan de evenwichtshoeveelheden $q_1^* = 0$ en $q_2^* = 2$. In het geval $a = a_H = 10$ vinden we de winstfuncties

$$u_1(q_1, q_2) = (6 - (q_1 + q_2))q_1,$$
$$u_2(q_1, q_2) = (8 - (q_1 + q_2))q_2.$$

Hieruit volgen de eerste orde voorwaarden

$$\frac{\partial}{\partial q_1} u_1(q_1, q_2) = 6 - 2q_1 - q_2 = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial q_2} u_2(q_1, q_2) = 8 - q_1 - 2q_2 = 0.$$

Bijbehorende evenwichtshoeveelheden zijn $q_1^{**} = \frac{4}{3}$ en $q_2^{**} = \frac{10}{3}$.

(b) In deze situatie maximaliseren beide bedrijven de verwachte winst gegeven door

$$\mathbb{E}\, u_1(q_1, q_2) = \frac{1}{4}(2 - (q_1 + q_2))q_1 + \frac{3}{4}(6 - (q_1 + q_2))q_1 = (5 - (q_1 + q_2))q_1,$$
$$\mathbb{E}\, u_2(q_1, q_2) = \frac{1}{4}(4 - (q_1 + q_2))q_2 + \frac{3}{4}(8 - (q_1 + q_2))q_2 = (7 - (q_1 + q_2))q_2.$$

Bereken dan de evenwichtshoeveelheden $(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$ als oplossing van het stelsel eerste orde voorwaarden

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \mathbb{E}\, u_1(q_1, q_2) = 5 - 2q_1 - q_2 = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial q_2} \mathbb{E}\, u_2(q_1, q_2) = 7 - q_1 - 2q_2 = 0.$$

Dan vinden we $\tilde{q}_1 = 1$ en $\tilde{q}_2 = 3$.

(c) Stel $((q_1^L, q_1^H), q_2^*)$ is een Bayesiaans evenwicht. Dan geldt

$$\begin{aligned}
q_1^L \in \arg\max_{q_1 \geq 0} u_1^L(q_1, q_2^*) &= (2 - (q_1 + q_2^*))q_1 - 1, \\
q_1^H \in \arg\max_{q_1 \geq 0} u_1^H(q_1, q_2^*) &= (6 - (q_1 + q_2^*))q_1 - 1, \\
q_2^* \in \arg\max_{q_2 \geq 0} \mathbb{E}\, u_2(q_1^L, q_1^H, q_2) &= \tfrac{1}{4}(4 - (q_1^L + q_2))q_2 + \tfrac{3}{4}(8 - (q_1^H + q_2))q_2 = (7 - (\tfrac{1}{4}q_1^L + \tfrac{3}{4}q_1^H + q_2))q_2,
\end{aligned}$$

hetgeen equivalent is met

$$\begin{aligned}
q_1^L &\in \arg\max_{q_1\geq 0}(2-(q_1+q_2^*))q_1,\\
q_1^H &\in \arg\max_{q_1\geq 0}(6-(q_1+q_2^*))q_1,\\
q_2^* &\in \arg\max_{q_2\geq 0}(7-(\tfrac{1}{4}q_1^L+\tfrac{3}{4}q_1^H+q_2))q_2.
\end{aligned}$$

Hieruit lossen we q_1^L, q_1^H en q_2^* middels eerste orde condities:

$$\begin{aligned}
&2-2q_1^L-q_2^*=0,\\
&6-2q_1^H-q_2^*=0,\\
&7-(\tfrac{1}{4}q_1^L+\tfrac{3}{4}q_1^H)-2q_2^*=0.
\end{aligned}$$

Dit lineaire stelsel vergelijkingen heeft geen positieve oplossing. Dan moet (?) gelden dat $q_1^L=0$. Hiermee vinden we dan $q_1^H=\frac{20}{13}$ en $q_2^*=\frac{38}{13}$.

(d) Hier zijn verschillende antwoorden mogelijk, naargelang de bedrijven op de hoogte zijn van mogelijk marktonderzoek van de tegenstander. Stel dat de bedrijven van precies van elkaar weten wanneer marktonderzoek heeft plaatsgevonden. Geval (i): bedrijf 1 doet geen onderzoek. Als bedrijf 2 ook geen onderzoek doet dan zijn de uitbetalingen als in het evenwicht in onderdeel (b), te weten 1. Stel bedrijf 2 doet in deze situatie wel marktonderzoek, dan bereken het Bayesiaanse evenwicht als in onderdeel (c) waarbij nu de rol van bedrijf 1 en 2 zijn omgedraaid. Dan vinden we als evenwicht

$$(q_1^*,(q_2^L,q_2^H))=(1,(\tfrac{3}{2},\tfrac{7}{2})).$$

Verwachte winst voor bedrijf 1 is dan

$$(5-(1+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{2}+\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{7}{2}))\cdot 1=1.$$

Dus als bedrijf 1 geen onderzoek laat verrichten is de verwachte uitbetaling gelijk aan 1. Geval (ii): bedrijf 1 doet onderzoek. Als bedrijf 2 ook onderzoek doet dan wordt met kans $\frac{1}{4}$ een Cournotspel als in onderdeel (a) gespeeld met $a=a_L$ en met kans $\frac{3}{4}$ het spel met $a=a_H$. Het enige verschil is de uitbetaling, aangezien kosten 1 in mindering moet worden gebracht. De evenwichten veranderen niet. Maar dan is de *a priori* uitbetaling voor bedrijf 1 gelijk aan

$$\tfrac{1}{4}\cdot -1+\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{7}{9}=\tfrac{17}{36}.$$

Doet bedrijf 2 geen onderzoek, dan zitten we in geval (c), met verwachte uitbetaling

$$\tfrac{1}{4}\cdot -1+\tfrac{3}{4}\cdot(\tfrac{400}{169}-1)=\tfrac{131}{169}.$$

Zonder marktonderzoek verdient bedrijf 1 in verwachting altijd 1, en met onderzoek minder dus op basis van dit argument zou bedrijf 1 geen marktonderzoek moeten uitvoeren.

Opgave 5 (25)
Beschouw het volgende statische Bayesiaans spel G. *Nature* bepaalt of de uitbetalingen zijn als in bi-matrix spel G_1 of G_2 waarbij elk spel even waarschijnlijk is:

G_1:

	L	R
T	$1,1$	$0,0$
B	$2,0$	$0,2$

G_2:

	L	R
T	$1,1$	$2,3$
B	$0,0$	$3,1$

Rijspeler 1 weet welk spel gespeeld wordt, G_1 of G_2, speler 2 is niet op de hoogte. Speler 1 kiest T of B en speler 2 kiest tegelijkertijd L of R.

(a) Vind alle Bayesiaanse evenwichten in zuivere strategieën.

Veronderstel nu dat speler 2 de keus van speler 1 observeert alvorens voor L of R te kiezen. Noem het zo ontstane signaleerspel G^*.

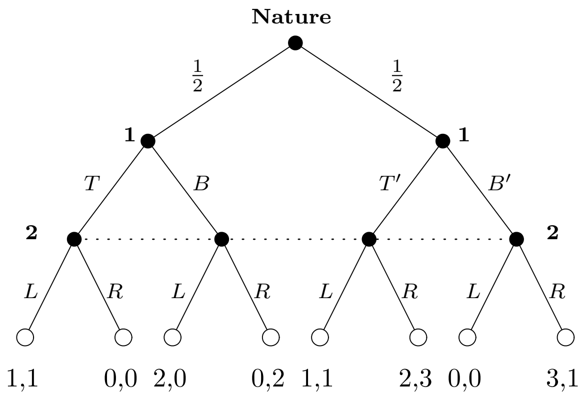
(b) Bepaal het separating perfect Bayesiaanse evenwicht in G^*.

(c) Bepaal het pooling perfect Bayesiaanse evenwicht in G^*.

Vergeet in onderdeel (b)-(c) niet in ieder geval de evenwichtsstrategieën en de beliefs te formuleren.

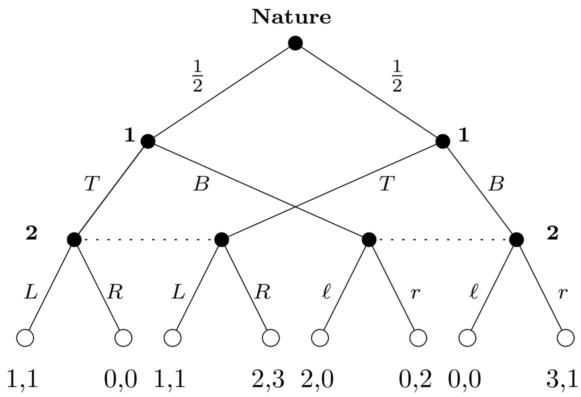
Oplossing

(a) De situatie beschrijven we met een spel in uitgebreide vorm met imperfekte informatie:

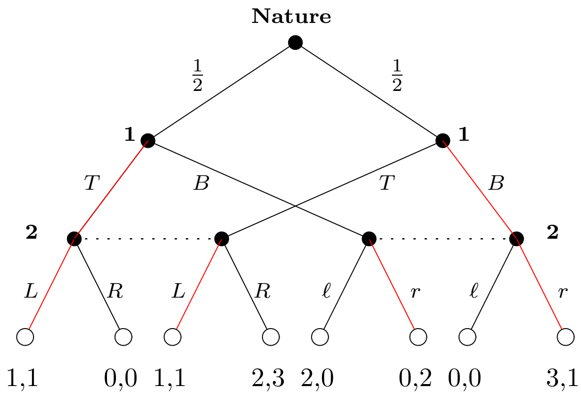


Stel speler 2 speelt L in evenwicht. Dan spelen type 1 en 2 van speler 1 de strategieën B en T', waarop speler 2 zich kan verbeteren via R. Dus in evenwicht speelt speler 2 R. Dan speelt speler 1 in G_1 zet T of B en in G_2 de zet B'. Dit bepaalt precies de evenwichten.

(b) Het signaleerspel heeft de volgende struktuur:



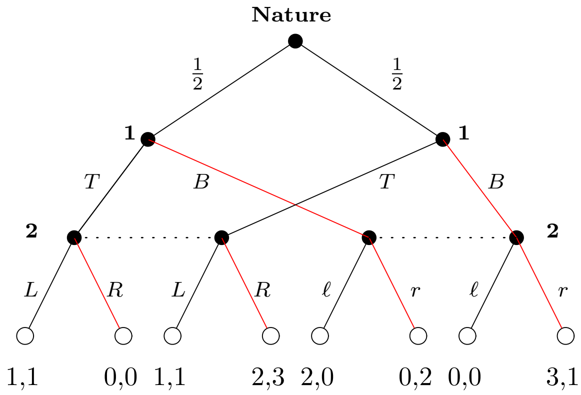
Het unieke *separating* PBE is het evenwicht waarbij type 1 (G_1) van speler 1 T signaleert en type 2 (G_2) B signaleert. Dan reageert speler 2 als volgt $s_2(T) = L, s_2(B) = r$.



Beliefs voor speler 1 zijn triviaal $b_1^1 = 1, b_1^2 = 1$ en voor speler 2 worden deze gegeven door

$b_2^1 = (1,0), b_2^2 = (0,1)$.

(c) Het unieke *pooling* PBE wordt gegeven door $s_1 = (s_1^1, s_1^2) = (B, B)$ en $(s_2(T), s_2(B)) = (R, r)$ waarbij de beliefs voor speler 1 als in onderdeel (b) zijn en de beliefs van speler 2 door $b_2^2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ en $b_2^1 = (p, 1-p)$ met $p \leq \frac{2}{3}$ worden gegeven.



Namelijk de condities voor de twee types speler 1 zijn vervuld

$$u_1^1(T,(R,r)) = 0 = u_1^1(B,(R,r)),$$
$$u_1^2(T,(R,r)) = 2 < 3 = u_1^2(B,(R,r)).$$

Bijbehorende beliefs van speler 1 zijn triviaal. Voor speler 2 geldt via Bayesian updating dat na signaal B geldt dat beide beslisknopen even waarschijnlijk zijn, via Bayesian updating volgt $b_2^2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. In evenwicht mag afwijken van antwoord r na B mag niet lonen voor speler 2, wat gewaarborgd wordt door

$$u_2^2(\ell \mid b_2^2) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 < \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 = u_2^2(r \mid b_2^2).$$

Informatieverzameling 1 voor speler 2, na signaal L, ligt buiten het evenwichtspad. Derhalve schrijft een perfect Bayesiaans evenwicht niets anders voor dan dat voor bijbehorend belief $b_2^1 = (p, 1-p)$ moet gelden

$$u_2^1(L \mid b_2^1) \leq u_2^1(R \mid b_2^1).$$

Maar dit betekent niets anders dan $p + (1-p) \leq 0 + 3(1-p)$ oftewel $p \leq \frac{2}{3}$.