Tentamen Wiskundige Economie A
Vrijdag 3 april 2009, 9:00-12:00 uur.

Dit tentamen bestaat uit **vier** opgaven. Je kunt maximaal 100 punten verdienen. Je hebt drie uur om het tentamen te maken. Als je klaar bent lever de uitwerkingen dan, voorzien van je naam en collegenummer, in bij de surveillant. Het tentamen zelf mag worden meegenomen. Bij dit tentamen mag geen gebruik gemaakt worden van een boek of meegebrachte aantekeningen. De uitwerkingen kunnen in het nederlands gemaakt worden. De antwoorden moeten goed gemotiveerd worden. Niet goed gemotiveerde antwoorden worden fout gerekend!

Succes!

Opgave 1 (30 punten): Een consument heeft de volgende nutsfunctie

$$u(x_1, x_2) = \left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)^2.$$

(a) Laat zien dat de Marshalliaanse vraagfuncties gegeven worden door

$$x_1(p_1, p_2, y) = \frac{p_2 y}{p_1(p_1 + p_2)} \text{ en } x_2(p_1, p_2, y) = \frac{p_1 y}{p_2(p_1 + p_2)}$$

en de indirecte nutsfunctie door

$$v(p_1, p_2, y) = \frac{p_1 + p_2}{p_1 p_2} y.$$

(b) Gebruik de identiteit van Roy om te controleren dat bovenstaande Marshalliaanse vraagfunctie voor goed 1 correct is.

(c) Gebruik de indirecte nutsfunctie uit onderdeel (a) om de uitgavenfunctie en Hicksiaanse vraagfuncties te vinden.

Stel dat de prijzen zijn gegeven als $p_1 = p_2 = 1$ en het inkomen als $y = 12$. De rest van deze opgave gaat over de verandering in consumptie die tot stand komt als de prijs van het eerste goed verandert van $p_1 = 1$ naar $p_1' = 3$.

(d) Bepaal de verandering in de consumptie van goed 1 als gevolg van bovenstaande prijsverandering. Bereken ook het *substitutie–* en *inkomens–effect* van die prijsverandering voor de consumptie van goed 1.

(e) Leg duidelijk uit wat de begrippen *compenserende* en *equivalente variatie* van een prijsverandering betekenen.

(f) Bepaal de compenserende en equivalente variatie van bovenstaande prijsverandering.

Opgave 2 (20 punten): Een consument met een continue, sterk stijgende en strikt quasiconcave nutsfunctie kiest een goederenbundel uit $\mathbb{R}_+^n$ zodanig dat zijn nut, gegeven zijn budgetbeperking, maximaal is. Laat $\mathbf{x}(\mathbf{p}, y) = (x_1(\mathbf{p}, y), \ldots, x_n(\mathbf{p}, y))$ de unieke oplossing van het nutsmaximalisatieprobleem zijn, met $y \in \mathbb{R}_{++}$ het inkomen van de consument en $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_{++}^n$ de prijsvector. Laat verder $\eta_i = \frac{y}{x_i} \frac{\partial x_i(\mathbf{p}, y)}{\partial y}$ de inkomenselasticiteit van goed i zijn en laat $s_i = \frac{p_i x_i(\mathbf{p}, y)}{y}$ tenslotte het inkomensdeel van goed i zijn.

(a) Beargumenteer dat het nutsmaximalisatieprobleem inderdaad een unieke oplossing heeft. Welke van de aannames op de nutsfunctie is hiervoor nodig? Leg duidelijk uit.

(b) Beargumenteer dat voor de oplossing van het nutsmaximalisatieprobleem moet gelden dat

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i(\mathbf{p}, y) = y. \tag{1}$$

Welke van de aannames op de nutsfunctie is hiervoor nodig? Leg duidelijk uit.

(c) Gebruik vergelijking (1) om te laten zien dat voor de inkomenselasticiteiten moet gelden dat

$$\sum_{i=1}^{n} s_i \eta_i = 1.$$

(d) Goed i wordt, voor gegeven prijzen $\mathbf{p}$ en inkomen y, een *noodzakelijk* goed genoemd als $0 < \eta_i < 1$. Leg uit dat de n goederen niet allemaal tegelijkertijd (bij dezelfde prijzen en inkomen) noodzakelijke goederen kunnen zijn voor deze consument.

Opgave 3 (20 punten): Kees heeft $I > 0$ euro gespaard en overweegt nu een bepaald gedeelte van dat geld in een aandelenfonds te investeren. Die investering is risicovol omdat met kans p de waarde van de aandelen over de loop van een jaar met 20% toeneemt, maar de waarde van het aandelenfonds met kans $1-p$ met 5% afneemt. Het geld dat Kees niet investeert in aandelen kan hij op een spaarrekening op de bank zetten. Die spaarrekening geeft een vaste jaarlijkse rente van 5%. Laat $Z \in [0, I]$ de hoeveelheid geld zijn die Kees investeert in het risicovolle aandelenfonds. Verder is gegeven dat Kees, hoewel hij zijn vermogen graag ziet groeien, risico–avers is en dat zijn nutsfunctie voldoet aan de verwachte nutshypothese.

(a) Leg uit dat het verwachte nut van Kees als functie van Z geformuleerd kan worden als

$$V(Z) = pu(1.05I + 0.15Z) + (1-p)\,u(1.05I - 0.1Z).$$

Wat kun je zeggen over het teken van $u'(x)$ en het teken van $u''(x)$? Leg uit.

(b) Laat zien dat $V(Z)$ een concave functie van Z is. Beargumenteer verder dat dit betekent dat $V(Z)$ een uniek maximum heeft op $[0, I]$ dat bereikt wordt voor, hetzij $Z = 0$, hetzij $Z = I$, hetzij $0 < Z < I$. Schets voor elk van die drie gevallen hoe de grafiek van het verwachte nut als functie van Z er uitziet.

(c) Leg uit dat, als $p > \frac{2}{5}$, Kees een strikt positieve hoeveelheid geld zal investeren in het aandelenfonds. Hoeveel investeert hij in het aandelenfonds als $0 \leq p \leq \frac{2}{5}$?

(d) Laat zien dat Kees **al** zijn geld in het aandelenfonds investeert als

$$p \geq p^* = \frac{2u'(0.95I)}{3u'(1.2I) + 2u'(0.95I)}$$

en laat zien dat $p^* > \frac{2}{5}$.

(e) Voor welke waarden van p zal Kees een gedeelte van zijn spaargeld, maar niet alles, investeren in het aandelenfonds?

Opgave 4 (30 punten): Gegeven is de volgende winstfunctie

$$\pi\left(p, w_1, w_2\right) = p^2 w_1^{\alpha} w_2^{\alpha},$$

van een winstmaximaliserend bedrijf dat opereert onder condities van volledige mededinging. Verder zijn de factorprijzen gegeven als $w_1 = 1$ en $w_2 = 4$.

(a) Beargumenteer dat de productietechnologie die gebruikt wordt door dit bedrijf niet kan voldoen aan (globaal) constante of toenemende schaalopbrengsten.

(b) Leg duidelijk uit waarom er moet gelden dat $\alpha = -\frac{1}{2}$.

(c) Laat zien dat, voor $\alpha = -\frac{1}{2}$ en voor de gegeven factorprijzen, de individuele aanbodsfunctie gegeven wordt door

$$q^s\left(p\right) = p.$$

Bepaal ook de factorvraagfuncties naar productiefactor 1 en 2 als functie van p.

De vraagfunctie op deze markt wordt gegeven door

$$q^d\left(p\right) = 24 - 2p.$$

(d) Bepaal het evenwicht onder volledige mededinging (prijs, hoeveelheid per bedrijf en winst per bedrijf) als er vier bedrijven (allen met dezelfde productietechnologie) actief zijn.

(e) Bepaal het monopolie–punt (prijs, hoeveelheid en winst van de monopolist). Ga er daarbij vanuit dat de kostenfunctie van de monopolist gegeven wordt door $c\left(q\right) = \frac{1}{2}q^2$.

(f) Teken het monopolie–punt in een grafiek met de hoeveelheid op de horizontale en de prijs op de verticale as. Geef daarin ook de verdeling aan die tot stand zou komen als de monopolist zich als prijsnemer zou gedragen. Geef tenslotte in deze figuur het welvaartsverlies als gevolg van de monopolist aan.

(g) Bereken het welvaartsverlies van het monopolie (ten opzichte van de oplossing waarbij er precies één bedrijf is dat zich als prijsnemer gedraagt).

Einde van het tentamen.