Wiskundige Economie A, academisch jaar 2006-2007, blok 3

Proeftentamen met uitwerking

Dit proeftentamen bestaat uit vier opgaven. Als dit proeftentamen een echt tentamen zou zijn, zouden de opgaven een gelijk maximaal aantal punten opleveren. Daarnaast zouden deelnemers aan het tentamen maximaal drie uur hebben om het te maken. Het echte tentamen zal qua structuur lijken op dit proeftentamen, maar het onderwerp en de indeling van de opgaven kan vanzelfsprekend afwijken.

Opgave 1: Een consument heeft de volgende nutsfunctie over twee goederen:

$$u(x_1,x_2)=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}, \quad x_1,x_2\geq 0.$$

De prijzen van de goederen zijn p_1 en p_2 en y is het inkomen van de consument. Aangenomen is dat de prijzen positief zijn en het inkomen niet-negatief. De consument streeft naar nutsmaximalisatie onder gegeven prijzen en inkomen.

(a) Bereken de Marshalliaanse vraagfunctie van de consument naar het eerste goed.

(b) Bereken de indirecte-nutsfunctie van de consument.

(c) Laat op basis van de antwoorden bij (a) en (b) zien dat Roy's Identiteit geldt met betrekking tot het eerste goed.

(d) Bereken de uitgavenfunctie van de consument en geef de Hicksiaanse vraagfunctie naar het tweede goed.

Opgave 2: Beschouw de volgende productiefunctie:

$$f(x_1,x_2)=\log x_1+\log x_2.$$

(a) Bereken de marginale technische subsitutievoet (MRTS) en de substitutie-elasticiteit van deze functie. Aan welke standaardaanname voldoet deze productiefunctie niet?

(b) Laat w_1 en w_2 de input-prijzen zijn en y het productieniveau. Aangenomen is dat zowel de prijzen als het productieniveau positief zijn. Bereken de kostenfunctie die hoort bij deze productiefunctie.

(c) Laat zien dat voor deze productiefunctie is voldaan aan Shephard's Lemma.

zie ommezijde

Opgave 3: Een industrie bestaat uit een groot aantal ondernemingen die ieder zelfgeproduceerde goederen aanbieden op een markt waarop volledige mededinging heerst. De goederen hebben in hoge mate een homogeen karakter, zodat ze door consumenten worden opgevat als substituten voor elkaar. De ondernemingen hebben een identieke korte-termijnkostenfunctie, gegeven door $c(y) = \tfrac{1}{2} y^2 + \tfrac{1}{2}$. De marktvraagfunctie luidt: $d(p) = A - \log p$, met $A > 0$, waarin p de marktprijs is.

(a) Bereken de individuele aanbodfunctie van een ondernemer.

(b) Bij welke prijs is de korte-termijnwinst van iedere ondernemer nul?

(c) Is er een bovengrens aan het aantal actieve ondernemers op de markt? Zoja, bereken deze bovengrens. Zonee, waarom niet?

Opgave 4: Een consument besteedt zijn inkomen aan twee goederen. Het inkomensdeel dat de consument besteedt aan goed i is s_i. De prijselasticiteit van de vraag naar goed i met betrekking tot de prijs p_j is ε_{ij} (met $i, j = 1, 2$). Definieer de volgende matrix:

$$E = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon_{11} & \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{12} & 1+\varepsilon_{22} \end{bmatrix}.$$

(a) Laat met behulp van aggregatievergelijkingen zien dat E singulier is.

(b) Laat zien dat uit (a) volgt dat:

$$\frac{1+\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{21}} = \frac{\varepsilon_{12}}{1+\varepsilon_{22}}.$$

(c) Gebruik een aggregatievergelijking om te bewijzen dat het volgende geldt:

$$s_1 = \frac{1}{1 - \dfrac{1+\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{21}}}, \quad \text{en } s_2 = \frac{1}{1 - \dfrac{1+\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{12}}}.$$

korte tentamenuitwerking volgt hierna

Antwoorden Opgave 1:

(a) De Lagrangiaan bij de nutsmaximalisatie is:

$$\mathcal{L}(x_1,x_2,\lambda)=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\lambda(y-p_1x_1-p_2x_2),$$

waarbij kan worden uitgegaan van budgetuitputting vanwege de strikte stijgendheid van de nutsfunctie. De eerste-ordevoorwaarden (EOV) leveren na eliminatie van λ de volgende restrictie op:

$$\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}=\frac{p_1}{p_2}.$$

Los deze vergelijking op voor x_2 en substitueer in de budgetrestrictie. Je houdt dan een vergelijking over in x_1, p_1, p_2 en y. De Marshalliaanse vraag naar het eerste goed volgt door het oplossen van deze vergelijking naar x_1:

$$x_1(p_1,p_2,y)=\frac{p_2y}{p_1(p_1+p_2)}.$$

(b) Het indirecte nut is het nut dat wordt bereikt bij uitoefening van de Marshalliaanse vraag. Om het te berekenen hebben we naast het resultaat bij (a) de Marshalliaanse vraag naar het tweede goed nodig. Die volgt echter eenvoudig uit de berekening bij (a):

$$x_2(p_1,p_2,y)=\frac{p_1y}{p_2(p_1+p_2)}.$$

De indirecte-nutsfunctie is dan:

$$v(p_1,p_2,y)=u\big(x(p_1,p_2,y)\big)=\frac{\sqrt{p_1+p_2}}{\sqrt{p_1p_2}}\sqrt{y}.$$

(c) Roy's Identiteit met betrekking tot het eerste goed zegt:

$$x_1(p_1,p_2,y)=-\frac{\dfrac{\partial v(p_1,p_2,y)}{\partial p_1}}{\dfrac{\partial v(p_1,p_2,y)}{\partial y}}.$$

Teller en noemer hebben respectievelijk de volgende waarden:

$$-\frac{\partial v(p_1,p_2,y)}{\partial p_1}=\frac{\sqrt{p_2y}}{2p_1\sqrt{p_1(p_1+p_2)}},\quad \frac{\partial v(p_1,p_2,y)}{\partial y}=\frac{\sqrt{p_1+p_2}}{2\sqrt{yp_1p_2}},$$

zodat deling van deze twee breuken inderdaad hetzelfde resultaat geeft als bij (a).

(d) De Lagrangiaan bij het probleem van uitgavenminimalisatie is:

$$\mathcal{L}(x_1,x_2,\lambda)=p_1x_1+p_2x_2+\lambda\left(u-\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right).$$

Eliminatie van λ uit de EOV geeft dezelfde vergelijking als bij nutsmaximalisatie:

$$\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}=\frac{p_1}{p_2}.$$

Oplossen voor x_1 en substitutie daarvan in de nutsrestrictie geeft de Hicksiaanse vraag naar het tweede goed:

$$x_2^h(p_1,p_2,u)=\left(\frac{p_1}{p_1+p_2}\right)^2u^2.$$

Op dezelfde manier wordt de Hicksiaanse vraag naar het eerste goed berekend, waarna de uitgavenfunctie volgt door substitutie in de objectieve functie:

$$e(p_1,p_2,u)=p_1x_1^h+p_2x_2^h=\frac{p_1p_2}{p_1+p_2}u^2.$$

Antwoorden Opgave 2:

(a) Voor $i=1,2$ geldt:

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_i}=\frac{1}{x_i},$$

zodat meteen volgt dat de MRTS_{12} gelijk moet zijn aan x_2/x_1. Hieruit volgt dat:

$$\sigma_{12}=\frac{d\log\frac{x_2}{x_1}}{d\log MRTS_{12}}=1=\sigma_{21}.$$

Omdat $f(0,0)\in\varnothing$ voldoet de productiefunctie niet aan de standaardaanname dat $f(0)=0$ (het productieniveau gaat naar minus oneindig als de *input*-hoeveelheden naar nul gaan, dus het bedrijf kan niet zomaar de productie stoppen).

(b) De Lagrangiaan bij de kostenminimalisatie is:

$$\mathcal{L}(x_1,x_2,\lambda)=w_1x_1+w_2x_2+\lambda\left(\log x_1+\log x_2-y\right).$$

De EOV geven na eliminatie van λ:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{x_2}{x_1}.$$

Substitutie van deze vergelijking in de randvoorwaarde bij de minimalisatie geeft de volgende oplossingen voor de goederenhoeveelheden:

$$x_1 = \sqrt{\frac{w_2}{w_1}} e^{y/2}, \quad x_2 = \sqrt{\frac{w_1}{w_2}} e^{y/2}.$$

Invullen in de objectieve functie geeft de kostenfunctie:

$$c(w_1, w_2, y) = 2\sqrt{w_1 w_2} e^{y/2}.$$

(c) Er moet gecontroleerd worden dat de partiële afgeleides van de kostenfunctie naar w_1 en w_2 respectievelijk gelijk zijn aan de bijbehorende conditionele *input*-vraagfuncties. Dit volgt onmiddellijk uit de bovenstaande vergelijkingen.

Antwoorden Opgave 3:

(a) Ondernemers kiezen hun aanbod $q^i(p)$ zo dat hun winst maximaal is, wat in sommige gevallen kan betekenen dat ze ervoor kiezen om helemaal niet op de markt actief te zijn. Een noodzakelijke voorwaarde voor maximale winst bij een actief bedrijf is gelijkheid tussen de marginale kosten bij een productieniveau y en marktprijs p:

$$mc(y) = \frac{dc(y)}{dy} = y = p.$$

De vraag is dan of de ondernemer met een aanbod gelijk aan de marktprijs meer winst boekt dan onder inactiviteit. De winstfunctie onder het individuele aanbod is:

$$\pi(p) = p^2 - \tfrac{1}{2}(p^2 - 1) = \tfrac{1}{2} p^2 - \tfrac{1}{2}.$$

De maximale winst gegeven activiteit van een bedrijf is dus altijd groter dan –½, dus groter dan de vaste kosten als $y=0$. Ondernemers zijn dus actief bij alle positieve marktprijzen en $q^i(p)=p$.

(b) Uit de bovenstaande winstfunctie blijkt dat de winst op de korte termijn van afzonderlijke ondernemers nul is als $p=1$ (op de lange termijn zijn alle winsten per definitie nul).

(c) Het aantal actieve bedrijven op de markt is maximaal als de marktprijs zo laag mogelijk is zonder bedrijven te dwingen hun productie te staken. Uit het resultaat bij (b) blijkt dat dit het geval is als $p=1$; de markt verkeert dan in de lange-termijnsituatie. Als het totale aantal bedrijven op de markt gelijk is aan J, dan is het marktaanbod bij $p=1$ gelijk aan $q^{s}(1)=J$. De marktvraag bij dezelfde prijs is $q^{d}(1)=A-\log(1)=A$. Dit betekent dat de bovengrens bestaat en gelijk is aan het grootste natuurlijke getal kleiner of gelijk aan A.

Antwoorden Opgave 4:

(a) De matrix E is singulier dan en slechts dan als geldt:

$$(1+\varepsilon_{11})(1+\varepsilon_{22})-\varepsilon_{12}\varepsilon_{21}=1+\varepsilon_{11}+\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}+\varepsilon_{22}-\varepsilon_{12}\varepsilon_{21}=0.$$

Gebruik de aggregatievergelijkingen van Cournot om de vergelijking te bewijzen. Omdat er slechts twee goederen in de economie zijn, zeggen de vergelijkingen:

$$s_1\varepsilon_{11}+s_2\varepsilon_{21}=-s_1 \Leftrightarrow \varepsilon_{11}=-1-\frac{s_2}{s_1}\varepsilon_{21},$$
$$s_1\varepsilon_{12}+s_2\varepsilon_{22}=-s_2 \Leftrightarrow \varepsilon_{12}=-\frac{s_2}{s_1}-\frac{s_2}{s_1}\varepsilon_{22},$$

waarbij gebruik gemaakt wordt van de impliciete aanname dat beide inkomensdelen positief zijn (dat is noodzakelijk omdat de elasticiteiten anders niet gedefinieerd zijn). Het subsitueren van de implicaties geeft:

$$-\frac{s_2}{s_1}\varepsilon_{21}-\frac{s_2}{s_1}\varepsilon_{21}\varepsilon_{22}+\frac{s_2}{s_1}\varepsilon_{21}+\frac{s_2}{s_1}\varepsilon_{22}\varepsilon_{21}=0.$$

Daarmee is de singulariteit van E aangetoond.

(b) Uit de eerste vergelijking bij (a) blijkt eenvoudig:

$$(1+\varepsilon_{11})(1+\varepsilon_{22})=\varepsilon_{12}\varepsilon_{21} \Leftrightarrow \frac{1+\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{21}}=\frac{\varepsilon_{12}}{1+\varepsilon_{22}}.$$

(c) De eerste aggregatievergelijking van Cournot kan als volgt worden opgeschreven:

$$s_1\varepsilon_{11}+(1-s_1)\varepsilon_{21}=-s_1 \Leftrightarrow s_1=\frac{-\varepsilon_{21}}{-\varepsilon_{21}+\varepsilon_{11}+1}=\frac{1}{1-\frac{1+\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{12}}}.$$

Het tweede inkomensdeel volgt dan uit het eerste:

$$s_2 = 1 - s_1 = \frac{-\dfrac{1+\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{21}}}{1-\dfrac{1+\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{21}}} = \frac{1}{-\dfrac{\varepsilon_{21}}{1+\varepsilon_{11}}+1} = \frac{1}{1-\dfrac{1+\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{12}}},$$

waarbij het resultaat bij (b) gebruikt is.