Tentamen Wiskundige Economie B. Woensdag 28 oktober 2009.

Motiveer bij alle vragen steeds **duidelijk** je antwoord. Antwoorden die niet goed gemotiveerd zijn worden fout gerekend!
Voor het schetsen van figuren mag gebruik gemaakt worden van **ruitjespapier**. Figuren hoeven niet precies op schaal te worden getekend, maar dienen wel **duidelijk** en **netjes** te zijn.

Het tentamen bestaat uit vier opgaven. In totaal kun je 100 punten verdienen.
Tip: verdeel je tijd goed over de verschillende opgaven en besteed niet teveel tijd aan een enkele (deel)opgave.

Schrijf op alle vellen papier je **naam** en **collegekaartnummer**.

Opgave 1 *(25 punten)*
We beschouwen een markt met twee bedrijven die elk een verschillend product aanbieden. De vraagfuncties worden gegeven door:

$$\begin{aligned} q_1(p_1, p_2) &= 1 - p_1 + \vartheta (p_2 - p_1) \\ q_2(p_1, p_2) &= 1 - p_2 + \vartheta (p_1 - p_2), \end{aligned}$$

waarbij $\vartheta \in (-1, \infty)$. Er zijn geen kosten aan productie verbonden.

a) Voor welke waarden van ϑ zijn de twee goederen *substituten*? En voor welke waarden zijn ze *complementen*? Leg uit.

b) Voor welke waarden van ϑ zijn de prijzen *strategische substituten*? Voor welke waarden van ϑ zijn de prijzen *strategische complementen*? Leg uit.

c) Bepaal het Bertrand–Nash evenwicht (prijzen, hoeveelheden en winsten).

d) Stel dat de twee bedrijven fuseren. Bepaal prijzen, hoeveelheden en winsten na de fusie.

e) Vergelijk de uitkomsten bij deelopgaven c) en d). Voor welke waarden van ϑ is de fusie winstgevend? Voor welke waarden van ϑ is de fusie welvaartsbevorderend? Kun je hiervoor een intuïtie geven?

Opgave 2 *(25 punten)*
Beschouw een markt voor een homogeen goed met Cournot competitie. De inverse vraagfunctie wordt gegeven door

$$P(Q) = 48 - Q.$$

Er zijn drie bedrijven die het product aanbieden. Elk van de drie bedrijven heeft kostenfunctie $c_i(q_i) = q_i^2$.

a) Bepaal het symmetrische Cournot–Nash evenwicht (hoeveelheden, prijs en winst per bedrijf).

b) Bepaal het kartelpunt (hoeveelheden, prijs en winst per bedrijf), waarbij de gezamenlijke winst wordt gemaximaliseerd.

We bekijken nu het oneindig herhaalde spel. Bedrijven verdisconteren toekomstige winsten met discontofactor δ en maken gebruik van de volgende strategieën. Elk bedrijf volgt de kartelafspraak zolang alle bedrijven dat in de vorige periode ook gedaan hebben. Als er afgeweken wordt van de kartelafspraak straffen de bedrijven elkaar door de volgende T perioden de Cournot–Nash hoeveelheid te produceren. In de eerste periode daarna keren ze weer terug naar de kartelafspraak.

c) Bepaal voor welke waarden van δ en T de karteloplossing stabiel is (dat is, voor welke waarden van δ en T de hierboven beschreven strategieën een deelspel perfect Nash evenwicht vormen).

We gaan er nu van uit dat er een mededingingsautoriteit bestaat die kartels probeert te bestrijden. Bovenstaande markt wordt elke periode met kans $\beta = \frac{1}{5}$ onderzocht (onafhankelijk van of er eerder wel of niet een kartel ontdekt is op die markt). Als er in die periode een kartel actief is krijgt elk bedrijf een boete ter hoogte van F. (Dat geldt ook als één van de bedrijven in die periode afwijkt van de kartelafspraak.) De volgende vragen hebben betrekking op de vraag hoe hoog de boete F moet zijn om ervoor te zorgen dat het kartel niet optreedt.

d) Bepaal de hoogte van de boete F die ervoor zorgt dat, in het eenmalig gespeelde spel, de verwachte winst van bedrijven minstens zo groot is bij Cournot competitie als bij het vormen van een kartel.

We gaan nu weer kijken naar het oneindig herhaalde spel. Ga er bij de volgende vraag van uit dat de discontofactor δ gelijk is aan $\delta = \frac{3}{4}$, dat bedrijven *grim trigger strategieën* gebruiken (dat wil zeggen: $T = \infty$) en dat bedrijven risico–neutraal zijn.

e) Bepaal hoe hoog F moet zijn om ervoor te zorgen dat het kartel instabiel wordt.

Opgave 3 *(20 punten)*
Beschouw een monopolist die een bepaald goed produceert tegen constante marginale kosten $c > 0$. De inverse vraagfunctie wordt gegeven door

$$P(Q) = \{\alpha F(Q), 0\},$$

waarbij $\alpha > 0$ een constante is, en $F(Q)$ een tweemaal continu differentieerbare functie is met $F'(Q) < 0$ en $F''(Q) < 0$. Laat $\overline{Q}$ het nulpunt van $F(\cdot)$ zijn (dat wil zeggen $F(\overline{Q}) = 0$ en dus $P(Q) = 0$ voor alle $Q \geq \overline{Q}$). Neem verder aan dat α zodanig is dat $P(0) = \alpha F(0) > c$. De monopolist lost het volgende probleem op

$$\max_{Q \geq 0} (P(Q) - c) Q. \tag{1}$$

a) Bepaal de eerste en de tweede orde conditie voor een maximum en beargumenteer dat de winstfunctie in (1) strikt concaaf is op het interval $\left(0, \overline{Q}\right)$.

b) Bewijs dat er een unieke oplossing Q^M voor probleem (1) bestaat en dat $0 < Q^M < \overline{Q}$. (**Hint**: maak een plaatje van de eerste orde afgeleide van de winstfunctie in (1) als functie van Q en laat zien dat die eerste orde afgeleide precies één nulpunt in het interval $\left(0, \overline{Q}\right)$ heeft en geen andere nulpunten.)

c) Laat, gebruikmakend van de eerste en tweede orde condities, zien dat een (marginale) verhoging in α leidt tot een verhoging in Q^M.

d) Maak een grafiek met de hoeveelheid op de horizontale as en schets daarin de inverse vraagfunctie, de marginale opbrengsten curve en de marginale kostencurve en geef daarin het monopoliepunt Q^M en de bijbehorende prijs aan. Karakteriseer ook de Pareto-optimale hoeveelheid Q^* en geef ook deze aan in de grafiek.

e) De overheid wil dat de monopolist de Pareto-optimale hoeveelheid Q^* (zoals bepaald in deelopgave d)) produceert en wil dit voor elkaar krijgen door een subsidie van τ uit te keren aan de monopolist voor elke eenheid van het product die de monopolist verkoopt. Bepaal hoe hoog τ moet zijn (als functie van Q^* en α) om dit te bewerkstelligen.

Opgave 4 *(30 punten)*
We beschouwen een markt waarbij één leverancier een product verkoopt – tegen prijs w – aan n detailhandelaren, die het op hun beurt doorverkopen – voor prijs p – aan de consumenten. De consumentenvraag voor dit homogene product wordt gegeven door de inverse vraagfunctie

$$P(Q) = 1 - Q,$$

waarbij $Q = q_1 + \ldots + q_n$ de totale afgezette hoeveelheid is, met q_i het aanbod van detailhandelaar i. Er zijn geen kosten aan productie verbonden voor de leverancier, en de enige kosten die een detailhandelaar heeft is de inputprijs w. De detailhandelarenmarkt wordt gekarakteriseerd door Cournot competitie.

a) Laat zien dat het evenwicht op deze markt gegeven wordt door

$$w^* = \frac{1}{2},\ Q_L^* = \frac{1}{2}\frac{n}{n+1} \text{ en } \pi_L^* = \frac{1}{4}\frac{n}{n+1}$$

voor de leverancier en

$$p^* = \frac{1}{2}\frac{n+2}{n+1},\ q_i^* = \frac{1}{2}\frac{1}{n+1} \text{ en } \pi_i^* = \frac{1}{4}\frac{1}{(n+1)^2}$$

voor elke detailhandelaar i.

b) Gebruik het antwoord van deelopgave a) om te laten zien dat een (horizontale) fusie tussen een aantal van de detailhandelaren altijd goed is voor de niet–fuserende detailhandelaren en altijd slecht voor de leverancier. Laat ook zien dat zo'n fusie niet welvaartsbevorderend is. Geef een intuïtie voor elk van deze resultaten.

c) Gebruik het antwoord van deelopgave a) om te laten zien dat, als $n = 4$, een horizontale fusie tussen detailhandelaren alleen strikt winstgevend is voor de deelnemende bedrijven als het een fusie tussen *alle* vier detailhandelaren betreft. Leg duidelijk uit waarom dit het geval is.

d) Stel dat de leverancier verticaal integreert met één van de detailhandelaren en zijn product niet meer levert aan de andere detailhandelaren (die daarom het product niet meer aan de consumenten kunnen verkopen). Bepaal het evenwicht dat na deze verticale integratie tot stand komt. Laat zien dat dit een welvaartsbevorderende fusie is en leg uit waarom dit het geval is.

e) Stel dat de leverancier geen van de detailhandelaren over kan nemen, maar wel een prijsregel van de vorm (w, A) kan hanteren, waarbij w de prijs voor elke eenheid van het product is, en A een vast bedrag, dat onafhankelijk is van hoeveel de detailhandelaar afneemt (dat wil zeggen, als detailhandelaar i, q_i eenheden afneemt van de leverancier moet het een bedrag $A + wq_i$ aan de leverancier betalen). Wat is nu, gegeven n, de optimale waarde van w? Welke waarde van A kiest de leverancier dan? (**Hint:** kun je ervoor zorgen dat, door w juist te kiezen, er precies evenveel aangeboden wordt aan de consumenten als de verticaal geintegreerde monopolist van deelopgave d) zou doen?) Wat is de optimale waarde van w als $n = 1$? En wat is de optimale waarde als $n \to \infty$?