Tentamen Wiskundige Economie B. Vrijdag 16 januari 2004.
Motiveer bij alle vragen steeds **duidelijk** het antwoord. Antwoorden die niet goed gemotiveerd zijn worden fout gerekend! Voor elke opgave kun je 20 punten verdienen. Schrijf op alle vellen papier je **naam** en **collegekaartnummer**.

Opgave 1
Een monopolist heeft als prijs-afzet (=inverse vraag) functie: $p = 15 - \frac{3}{2}x$ en als kosten functie $C(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$.

a) Bepaal de marginale opbrengsten, de marginale kosten en de gemiddelde kosten $(\frac{C(x)}{x})$, als een functie van x. Teken een figuur met de prijs-afzet functie, de marginale opbrengsten curve, de marginale kosten curve en de gemiddelde kosten curve.

b) Laat zien dat de monopolie prijs $p^{mon} = 10\frac{1}{2}$.

   Geef het monopoliepunt aan in de figuur en bereken de bijbehorende winst.

c) Laat zien dat de competitieve prijs $p^{com} = 9\frac{3}{4}$.

   Geef het competitieve evenwicht aan in de figuur en bereken de bijbehorende winst.

d) De overheid wil het monopolie middels een maximum prijs $p^{\max}$ reguleren.

   Welke hoeveelheid zal deze monopolist bij de gegeven $p^{\max}$ aanbieden?

   (Hint: maak onderscheid tussen $p^{\max} \geq 10\frac{1}{2}(= p^{mon})$; $9\frac{3}{4}(= p^{com}) \leq p^{\max} < 10\frac{1}{2}; 6 \leq p^{\max} < 9\frac{3}{4}$; en $p^{\max} < 6$.)

   Is het waar dat deze monopolist onder invloed van deze maximum prijs nooit minder zal produceren dan wanneer hij niet gereguleerd zou zijn?

Opgave 2
De inverse vraag functie in een duopolie luidt $p = 4 - x_1 - x_2$, waarbij x_i de output van ondernemer $i(= 1, 2)$ is. De kosten functie van ondernemer 1 is $C_1(x_1) = x_1^2$, die van ondernemer 2 is $C_2(x_2) = 2x_2$. De winst van ondernemer i is $\pi_i(x_1, x_2) = px_i - C_i(x_i)$. De ondernemers hebben volledige informatie over deze functies.

a) Bereken de evenwichtshoeveelheden en winsten in het Cournot evenwicht.

Zij

$$\pi^0 = \max_{x_1, x_2} (\pi_1 (x_1, x_2) + \pi_2 (x_1, x_2))$$

Dit maximum wordt aangenomen bij outputs x_1^0 en x_2^0.

b) Bereken x_1^0, x_2^0 en π^0.

Om de kartelwinst te verdelen spelen de ondernemers het volgende spel. Eerst kondigen ze de hoeveelheden $\overline{x}_1$ en $\overline{x}_2$ aan die ze zullen produceren als ze geen afspraken zouden hebben. Dit zou winsten $\overline{\pi}_i = \pi_i(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ opgeleverd hebben. Nu spreken ze af de hoeveelheden x_1^0 en x_2^0 te produceren en 'side payments' uit te voeren zodat de uiteindelijke betaling aan ondernemer i gelijk wordt aan:

$$\Psi_i(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = \overline{\pi}_i + \frac{\pi^0 - (\overline{\pi}_1 + \overline{\pi}_2)}{2} = \frac{1}{2}\pi^0 + \frac{1}{2}(\overline{\pi}_i - \overline{\pi}_j), \qquad j \neq i.$$

c) Welke hoeveelheden $\overline{x}_1$ en $\overline{x}_2$ zijn optimaal om aan te kondigen voor de ondernemers en welke uitbetalingen Ψ_1 en Ψ_2 horen daarbij?

Opgave 3

Beschouw een veiling met twee risiconeutrale bieders. Hun individuele waarderingen zijn, onafhankelijk van elkaar, getrokken uit de uniforme verdeling op $[0, 1]$. Beschouw nu een gesloten bod veiling waarbij de bieder met het hoogste bod wint en zijn eigen bod betaalt. De verliezer moet echter ook betalen, en wel precies de helft van zijn eigen bod.

a) Formuleer het verwachte surplus van een bieder die meedoet aan deze veiling, als functie van zijn waardering v en zijn bod b. Leid ook de eerste orde conditie voor een symmetrisch Nash-evenwicht af. Leg duidelijk uit hoe je aan deze eerste orde conditie komt en waarom deze correspondeert met de conditie voor een Nash-evenwicht!

b) Laat zien dat de biedstrategie

$$b^*(v) = \frac{v^2}{1+v}$$

voldoet aan de eerste orde conditie voor een symmetrisch Nash-evenwicht (Hint: bepaal eerst de inverse biedstrategie $\sigma(b)$). Schets $b^*(v)$ ook in een grafiek. Is $b^*(v)$ monotoon stijgend in v?

c) Leg uit wat de *Revenue Equivalence Theorem* is en onder welke voorwaarden deze stelling geldt. Voldoet bovenstaande veiling aan deze voorwaarden?

d) Bepaal de verwachte opbrengst van bovenstaande veiling voor de veilingmeester. (Hint: de verdelingsfunctie van de hoogste waardering is $F_{(2)}(v) = v^2$ en van de laagste waardering $F_{(1)}(v) = 2v - v^2$.) Is je antwoord consistent met je antwoord op vraag c)?

Opgave 4

We beschouwen de markt voor ziektekostenverzekeringen met twee verzekeraars en een groot aantal consumenten die alleen verschillen in de kans dat ze ziek worden. Het inkomen van een consument is w_g^0 als hij gezond blijft en w_b^0 als hij ziek wordt, met $w_g^0 > w_b^0$. Consumenten van type l (laag risico) worden ziek met kans ρ_l en consumenten van type h (hoog risico) worden ziek met kans ρ_h, waarbij $\rho_h > \rho_l$. Consumenten zijn risico-avers, hetgeen weergegeven wordt door een strict concave nutsfunctie $u(w)$, met $u'(w) > 0$ en $u''(w) < 0$. De verzekeraars kunnen nu, door de juiste premie en dekking te formuleren, verschillende contracten (w_g, w_b) aanbieden. Het verwachte nut van iemand uit risicogroep i $(i = h, l)$ die inkomen w_g krijgt als hij niet ziek wordt en w_b als hij wel ziek wordt, wordt dan gegeven door

$$u(L_i) = (1 - \rho_i)\, u(w_g) + \rho_i u(w_b).$$

In principe zijn er verschillende soorten evenwichten mogelijk. Eén van deze evenwichten is een zogenaamd 'pooling'-evenwicht, waarbij de verzekeraars slechts één contract aanbieden wat dan bestemd is voor zowel de hoge risicogroep, als de lage risicogroep. In deze opgave moet je laten zien dat een zo'n pooling-evenwicht niet kan bestaan in de hierboven beschreven verzekeringsmarkt.

a) Leg uit wat averechtse of tegen-selectie is (*adverse selection*). Is er in bovenstaande verzekeringsmarkt sprake van tegenselectie? Leg uit.

b) Geef in een figuur in het (w_g, w_b) −vlak de beginverdeling $\left(w_g^0, w_b^0\right)$ aan. Schets ook een indifferentiecurve van iemand met een hoog risico en van iemand met een laag risico. Welke indifferentiecurve loopt steiler? Waarom?

c) We veronderstellen dat elke verzekeraar een contract kiest zodat zijn winst gemaximaliseerd wordt, gegeven de contracten die aangeboden zijn door de andere verzekeraar. Leg uit dat dit impliceert dat de verzekeraars geen winst zullen maken. Schets in het figuur de verzameling contracten waarvoor de verzekeraars geen winst zullen maken, gegeven dat deze contracten bestemd zijn voor alle typen consumenten. Noem deze verzameling π.

d) Kies een willekeurig contract $\left(w_g^C, w_b^C\right)$ uit π en leg uit waarom dit geen pooling evenwicht kan zijn. (Hint: teken de indifferentiecurven van een type l en een type h consument door het punt $\left(w_g^C, w_b^C\right)$, en kijk dan of je een contract $(\overline{w}_g, \overline{w}_b) \neq \left(w_g^C, w_b^C\right)$ kunt vinden zodanig dat het voor een verzekeraar loont om $(\overline{w}_g, \overline{w}_b)$ aan te bieden, gegeven dat de andere verzekeraar $\left(w_g^C, w_b^C\right)$ aanbiedt).

e) Gebruik je antwoord op opgave *d*) om te bewijzen dat een pooling-evenwicht niet bestaat.

Opgave 5

Een (risico-neutrale) eigenaar van een reisbureau wil de verkoopster een contract aan bieden dat tot maximale winst voor de eigenaar leidt. De verkoopster is risicomijdend en heeft nutsfunctie

$$U(w,a) = w^{\frac{1}{3}} - a^2,$$

waarbij w haar loon is en a haar "inspanningsniveau". Het reserveringsnut van de verkoopster is $\overline{u} = 1$. De verkoopster kan kiezen tussen twee inspanningsniveaus, $a_h = 1$ en $a_l = 0$. Als de verkoopster zich maximaal inspant ($a = 1$) is de opbrengst voor de eigenaar 20 euro met kans $\frac{1}{4}$ en 60 euro met kans $\frac{3}{4}$. Als de verkoopster zich minimaal inspant ($a = 0$) is die opbrengst 20 euro met kans $\frac{3}{4}$ en 60 euro met kans $\frac{1}{4}$. We gaan er van uit dat het inspanningsniveau van de verkoopster niet waarneembaar is, en dat de eigenaar van het reisbureau alleen een looncontract aan kan bieden dat afhangt van de omzet van de verkoopster. Dat wil zeggen, hij biedt een contract (w_l, w_h) aan zodanig dat de verkoopster loon w_l krijgt als haar omzet 20 euro is en dat ze loon w_h krijgt als haar omzet 60 euro is.

a) We gaan eerst kijken naar het optimale contract (w_l, w_h) voor de eigenaar van het reisbureau, gegeven dat hij er voor wil zorgen dat de verkoopster zich minimaal inspant. Bepaal eerst de *participatiebeperking* waar het contract aan moet voldoen (als het contract aan deze beperking voldoet zal de verkoopster het contract tekenen). Bepaal ook de *incentivebeperking* waar het contract aan moet voldoen (de incentivebeperking zorgt ervoor dat de verkoopster het juiste inspanningsniveau $a = 0$ kiest). Bepaal nu het optimale contract voor de eigenaar. (Hint: bepaal eerst het optimale contract als je alleen rekening houdt met de participatiebeperking. Laat daarna zien dat de oplossing van dit probleem ook voldoet aan de incentivebeperking).

b) We gaan nu kijken naar het optimale contract (w_l, w_h) voor de eigenaar van het reisbureau, gegeven dat hij er voor wil zorgen dat de verkoopster zich maximaal inspant ($a = 1$). Bepaal eerst weer de participatie- en incentivebeperkingen. Bepaal vervolgens het optimale contract voor de eigenaar. (Let wel: dit contract moet zowel aan de participatie- als aan de incentivebeperking voldoen!)

c) Wat is het optimale contract?