Tentamen Wiskundige Economie B. Vrijdag 24 juni 2004, 9:30-12:30.
Motiveer bij alle vragen steeds **duidelijk** het antwoord. Antwoorden die niet goed gemotiveerd zijn worden fout gerekend! Je kunt in totaal 90 punten halen voor Opgave 1 tot en met 4, de resterende 10 punten krijg je gratis. Schrijf op alle vellen papier je **naam** en **collegekaartnummer**. Aan het einde van het tentamen moet alles ingeleverd worden, inclusief dit tentamenvel.

Opgave 1 (25 punten)
De inverse vraag functie in een homogeen Cournot triopolie luidt

$$p = 1 - Q$$

waarbij $Q = q_1 + q_2 + q_3$ de totale output van de drie ondernemers ($i = 1, 2, 3$) is. De marginale kosten functie van elke ondernemer is constant, er zijn geen vaste kosten. De marginale kosten voor ondernemer 1 zijn $c_1 = 0$ en voor ondernemer 2 en 3 $c_2 = c_3 = c$. We gaan er van uit dat $0 \leq c \leq \frac{1}{2}$.

a) Bereken het Cournot-Nash evenwicht als functie van de marginale kosten c (de prijs, de door de drie bedrijven geproduceerde hoeveelheden en voor elk bedrijf de winst).

Ondernemers 1 en 2 fuseren. De marginale kosten van het gefuseerde bedrijf zijn die van het meest efficiënte van de twee, dus die van 1.

b) Bepaal het Cournot-Nash evenwicht dat ontstaat na de fusie (de geproduceerde hoeveelheid van beide ondernemers, de prijs en de winst van beide ondernemers).

c) Verwacht je dat ondernemer 3 er op vooruit of er juist op achteruit gaat door de fusie van ondernemers 1 en 2? Leg uit en controleer met een berekening.

d) Voor welke waarden van c maakt het gefuseerde bedrijf meer winst dan de niet gefuseerde ondernemers 1 en 2 te samen in de oorspronkelijke situatie? Relateer dit aan de '80%-regel' (deze regel zegt dat aan een succesvolle fusie minstens 80% van de ondernemers mee moet doen). Waarom gaat de 80% regeling hier niet altijd op?

Opgave 2 (15 punten)
In een duopolie met productdifferentiatie, is voor ondernemer $i = 1, 2$ de winstfunctie gegeven door

$$\pi_i = p_i q_i.$$

Hierin is p_i de prijs en q_i de aangeboden hoeveelheid van ondernemer i. Er wordt verondersteld dat er geen kosten zijn.

De vraagfuncties worden gegeven door

$$
\begin{aligned}
q_1 &= D_1(p_1,p_2) = 1 - p_1 + \frac{1}{2}p_2 \\
q_2 &= D_2(p_1,p_2) = 1 + \frac{1}{2}p_1 - p_2
\end{aligned}
$$

In het spel dat deze ondernemers spelen is de strategische keuze van ondernemer 1 zijn prijs p_1 en die van ondernemer 2 zijn hoeveelheid q_2. De ondernemers kiezen p_1 en q_2 simultaan. Bereken de evenwichtsprijzen, evenwichtshoeveelheden en evenwichtswinsten voor dit spel.

Opgave 3 (25 punten)
Beschouw een veiling met n risiconeutrale bieders. Hun individuele waarderingen zijn, onafhankelijk van elkaar, getrokken uit de uniforme verdeling op $[1,2]$ (de uniforme verdeling op $[1,2]$ heeft verdelingsfunctie $F(v) = v - 1$ en dichtheidsfunctie $f(v) = 1$, voor $1 \leq v \leq 2$). Beschouw nu een standaard eerste prijs gesloten bod veiling waarbij de bieder met het hoogste bod wint en zijn eigen bod betaalt.

a) Laat zien dat het verwachte surplus van een bieder die meedoet aan deze veiling, als functie van zijn waardering v en zijn bod b en gegeven dat alle andere bieders de strategie $\sigma(b)$ gebruiken gegeven wordt door

$$U(b,v) = [\sigma(b) - 1]^{n-1}(v - b)$$

Leid ook de eerste orde conditie voor een symmetrisch Nash-evenwicht af. Leg duidelijk uit hoe je aan deze eerste orde conditie komt en waarom deze correspondeert met de conditie voor een Nash-evenwicht!

b) Laat zien dat de biedstrategie

$$b^*(v) = \frac{n-1}{n}v + \frac{1}{n}$$

voldoet aan de eerste orde conditie voor een symmetrisch Nash-evenwicht (Hint: bepaal eerst de inverse biedstrategie $\sigma(b)$).

De bieders komen voorafgaand aan de veiling samen om de volgende (illegale) afspraak te naken: degene die de veiling wint betaalt aan elk van de andere deelnemers precies $\delta \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$ euro.

c) Bepaal het verwachte surplus van een willekeurig bieder die meedoet aan deze veiling, als functie van zijn waardering v en zijn bod b en gegeven dit systeem van ‘rekenvergoedingen’.

d) Bepaal de eerste orde conditie voor een Nash-evenwichts biedstrategie en laat zien dat de biedstrategie

$$b^{**}(v) = \frac{n-1}{n}v + \frac{1}{n} - n\delta$$

voldoet aan de eerste orde condite. Laat ook zien dat een bod volgens deze biedstrategie altijd groter of gelijk aan 0 is.

e) Laat zien dat de verwachte opbrengst voor de verkoper van de veiling met rekenvergoedingen lager is dan de verwachte opbrengst van de veiling zonder rekenvergoeding. (Hint: je hoeft hiervoor niet de verwachte opbrengst zelf uit te rekenen!) Aan welke conditie voor de *Revenue Equivalence Theorem* is hier niet voldaan?

Opgave 4 (25 punten)
Een (risico-neutrale) eigenaar van een kledingwinkel wil de verkoopster een contract aan bieden dat tot maximale winst voor de eigenaar leidt. De verkoopster is risicomijdend en heeft nutsfunctie

$$U(w, a) = \sqrt{w} - a,$$

waarbij w haar loon is en a haar "inspanningsniveau". Het reserveringsnut van de verkoopster is $\overline{u} = 2$. De verkoopster kan kiezen tussen twee inspanningsniveaus, $a = 1$ en $a = 0$. Als de verkoopster zich maximaal inspant ($a = 1$) is de opbrengst voor de eigenaar 200 euro met kans $\frac{1}{2}$ en 500 euro met kans $\frac{1}{2}$. Als de verkoopster zich minimaal inspant ($a = 0$) is die opbrengst met zekerheid gelijk aan 200. We gaan er van uit dat het inspanningsniveau van de verkoopster niet waarneembaar is, en dat de eigenaar van de winkel alleen een looncontract aan kan bieden dat afhangt van de omzet van de verkoopster. Dat wil zeggen, hij biedt een contract (w_l, w_h) aan zodanig dat de verkoopster loon w_l krijgt als haar omzet 200 euro is en dat ze loon w_h krijgt als haar omzet 500 euro is.

a) We gaan eerst kijken naar het optimale contract (w_l, w_h) voor de eigenaar van de winkel, gegeven dat hij er voor wil zorgen dat de verkoopster zich minimaal inspant. Bepaal eerst de *participatiebeperking* waar het contract aan moet voldoen (als het contract aan deze beperking voldoet zal de verkoopster het contract tekenen). Bepaal ook de *incentivebeperking* waar het contract aan moet voldoen (de incentivebeperking zorgt ervoor dat de verkoopster het juiste inspanningsniveau $a = 0$ kiest). Bepaal nu het optimale contract voor de eigenaar. (Hint: bepaal eerst het optimale contract als je alleen rekening houdt met de participatiebeperking. Laat daarna zien dat de oplossing van dit probleem ook voldoet aan de incentivebeperking).

b) We gaan nu kijken naar het optimale contract (w_l, w_h) voor de eigenaar, gegeven dat hij er voor wil zorgen dat de verkoopster zich maximaal inspant ($a = 1$). Bepaal eerst weer de participatie- en incentivebeperkingen. Bepaal vervolgens het optimale contract voor de eigenaar. (Let wel: dit contract moet zowel aan de participatie- als aan de incentivebeperking voldoen!)

c) Wat is het optimale contract?