FACULTEIT ECONOMIE EN BEDRIJFSKUNDE
Afdeling Kwantitatieve Economie

Wiskunde AEO V

Tentamen
7 januari 2009

Dit tentamen bestaat uit vier opgaven. Wees precies. Vermeld welke stellingen je gebruikt, en verifieer van elke stelling die je gebruikt eerst de hypotheses. Een antwoord is **geheel fout** als er geen argumenten worden gegeven. Voorbeelden of tekeningen gelden **niet** als argumenten. Juist beantwoorde deelvragen brengen 7 punten op, tenzij anders vermeld. **Rekenmachines zijn niet toegestaan.**

1. *Stellingen (10 punten)* Formuleer de stelling van Lagrange voor ongelijkheidsrestricties.

2. *Arbeidsaanbod (27 punten)*
In de 19e eeuw was er een discussie onder economen over de vraag: werken mensen meer of minder als hun loon stijgt? Om dit te onderzoeken, nemen we aan dat een agent een hoeveelheid $\ell \in [0, 1]$ van zijn beschikbare tijd gaat werken. Als het loon per tijdseenheid gelijk is aan p, levert dit een totaal loon $p\ell$ op, waar de agent een nut $u(p\ell)$ aan ontleent. Zijn vrije tijd $1 - \ell$ levert hem vervolgens nog het nut $v(1 - \ell)$ op. Het totale nut is dan

$$w(\ell, p) = u(p\ell) + v(1 - \ell).$$

We nemen aan dat $p > 0,\ 0 \leq \ell \leq 1$, dat $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ en $v : [0, 1] \to \mathbb{R}$ beide C^2 zijn, met $u' > 0$ en $v' > 0$, en $u'' < 0$ en $v'' < 0$.

a (*3 punten)* Laat $p > 0$ een vast getal zijn. Laat zien dat $w(\ell, p)$ als functie van ℓ een (globaal) maximum aanneemt op $[0, 1]$.

b (*3 punten)* Neem aan dat het globale maximum aangenomen wordt in een punt $\ell \in (0, 1)$. In dit punt moet gelden dat

$$u'(p\ell)p = v'(1 - \ell).$$

Waarom?

c Stel dat voor $p_0 > 0$ het globale maximum uit opgave **2b** wordt aangenomen in $\ell_0 \in (0, 1)$. Laat zien dat ℓ uit deze vergelijking als functie van p kan worden opgelost. Welke stelling gebruik je? Geef zoveel mogelijk eigenschappen van de functie $\ell = \ell(p)$.

d Als het loon per tijdseenheid p stijgt, kun je dan iets zeggen of de hoeveelheid arbeidstijd $\ell(p)$ daalt of stijgt? Beargumenteer je antwoord.

e Laat nu

$$u(x) = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

met $\alpha > 0$. Kun je nu iets zeggen of de hoeveelheid arbeidstijd $\ell(p)$ daalt of stijgt als p stijgt, afhankelijk van de waarde van α?

3. *Maxima en minima (35 punten)*
Laat

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1^2 + \frac{14}{25} x_1 x_2 + x_2^2 \leq 1 \right\},$$

en $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven worden door

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2,$$

a Is V convex? Is V compact? Bewijs je antwoorden.

b Laat zien dat f op V een maximum en een minimum aanneemt.

c *(14 punten)* Bepaal alle kritieke punten van het probleem de extrema van f beperkt tot V te vinden.

d Bepaal met behulp van de tweede-orde voorwaarden van elk kritiek punten gevonden in **3c** of f in dat punt een lokaal maximum of een lokaal minimum aanneemt. Geef ook aan in welke punten globale extrema worden aangenomen.

4. *Topologie en concaviteit (28 punten)*

a Geef de definitie van de begrippen “randpunt” en “inwendig punt”.

b Laat $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Wat is de rand van de verzameling $f([0, 2])$?

c Laat zien dat de doorsnede van twee open verzamelingen open is.

d Laat zien dat de doorsnede van twee convexe verzamelingen convex is.