



Wiskunde AEO V

Tentamen

1 november 2005

Dit tentamen bestaat uit vier opgaven. Wees precies. Vermeld welke stellingen je gebruikt, en verifieer van elke stelling die je gebruikt eerst de hypothesen. Een antwoord is **geheel fout** als er geen argumenten worden gegeven. Voorbeelden of tekeningen gelden **niet** als argumenten. Juist beantwoorde deelvragen brengen 6 punten op, tenzij anders vermeld. **Rekenmachines zijn niet toegestaan.**

1. De tekenschema's in opgave **1a–1e** zijn de voortekens van vermenigvuldigers en de laatste leidende hoofdminoren in een kritiek punt van een optimaliseringsprobleem met gelijkheidsnevenvoorwaarden, die in opgave's **1f–1j** hebben betrekking op een soortgelijk probleem met ongelijkheidsnevenvoorwaarden.

De ruimtedimensie m is steeds aangegeven, en aan de rangcondities is steeds voldaan. Bewijs in ieder geval of de functie in het kritieke punt een lokaal maximum, een lokaal minimum of geen van beide aanneemt.

Elke deelvraag van deze vraag brengt maximaal 2 punten op.

Gelijkheidsnevenvoorwaarden:

a $m = 2$,

μ	H_3
-	+

b $m = 2$,

μ	H_3
+	-

c $m = 3$,

μ	H_4	H_5
-	-	-

d $m = 3$,

μ_1	μ_2	H_5
-	-	-

e $m = 4$,

μ_1	μ_2	H_5	H_6
+	-	+	-

Ongelijkheidsnevenvoorwaarden:

f $m = 2$,

μ	H_3
-	+

g $m = 3$,

μ	H_4	H_5
+	-	+

h $m = 3$,

μ	H_4	H_5
-	+	-

i $m = 4$,

μ_1	μ_2	H_5	H_6
-	-	+	+

j $m = 4$,

μ_1	μ_2	H_5	H_6
+	+	-	+

2. **a** Geef de definitie van het begrip “gesloten verzameling”.
b Laat zien dat de doorsnede van twee gesloten verzamelingen gesloten is.
c Laat vanuit de definitie zien dat het interval $[0, \infty)$ een gesloten deelverzameling is van \mathbb{R} .

3. Stel dat een functie $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ is gegeven en stel dat $a, b \in \mathbb{R}^m$ voldoen aan $b = f(a)$. We willen met de impliciete functiestelling de vergelijking

$$y - f(x) = 0$$

naar x oplossen.

- a Welke voorwaarden moeten we aan f opleggen, opdat we op dit probleem de impliciete functiestelling toe kunnen passen?
 - b Welke conclusies kunnen we dan met de impliciete functiestelling trekken? Geef zoveel mogelijk gevolgtrekkingen.
 - c Stel $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en dat de oplossing $x = g(y)$ van $y = f(x)$ tenminste twee keer differentieerbaar is. Bereken met de techniek van impliciet differentieren de tweede afgeleide van g in het punt $y = b$ in termen van de afgeleiden van f in het punt a .
 - d Controleer je resultaat gevonden in 3c voor het geval $f(x) = x^2$ en $a = 1$.
4. Laat $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven zijn door $f(x) = -x_1^2 - x_2$, en laat $g_1(x) = x_1x_2$ en $g_2(x) = x_1 + 2x_2$.

$$V = \{x \in \mathbb{R}^2 : g_1(x) \geq 1, g_2(x) \geq 3\}.$$

- a Laat zien dat V een convexe verzameling is. Schets V .
- b Laat zien dat f een pseudo-concave functie is op $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$.
- c (14 punten) Vind alle kritieke punten voor het probleem extrema van f beperkt tot V te vinden.
- d Bepaal met de test op de vermenigvuldigers en de tweede-orde voorwaarden van alle kritieke punten of f in dat punt een lokaal maximum of een lokaal minimum aanneemt.
- e Bepaal het globale maximum van f op V . Bewijs je antwoord (dat wil zeggen, bewijs dat een lokaal maximum gevonden bij de vorige opgave inderdaad een globaal maximum is).