



## Wiskunde AEO V

### Uitwerking tentamen

1 november 2005

1. De tekenschema's in opgave **1a–1e** zijn de voortekens van vermenigvuldigers en de laatste leidende hoofdminoren in een kritiek punt van een optimaliseringsprobleem met gelijkheidsnevenvoorwaarden, die in opgave's **1f–1j** hebben betrekking op een soortgelijk probleem met ongelijkheidsnevenvoorwaarden.

De ruimtedimensie  $m$  is steeds aangegeven, en aan de rangcondities is steeds voldaan. Bewijs in ieder geval of de functie in het kritieke punt een lokaal maximum, een lokaal minimum of geen van beide aanneemt.

Gelijkheidsnevenvoorwaarden:

<b>a</b> $m = 2$ ,	<table border="1"><tr><td><math>\mu</math></td><td><math>H_3</math></td></tr><tr><td>-</td><td>+</td></tr></table>	$\mu$	$H_3$	-	+				
$\mu$	$H_3$								
-	+								
<b>b</b> $m = 2$ ,	<table border="1"><tr><td><math>\mu</math></td><td><math>H_3</math></td></tr><tr><td>+</td><td>-</td></tr></table>	$\mu$	$H_3$	+	-				
$\mu$	$H_3$								
+	-								
<b>c</b> $m = 3$ ,	<table border="1"><tr><td><math>\mu</math></td><td><math>H_4</math></td><td><math>H_5</math></td></tr><tr><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr></table>	$\mu$	$H_4$	$H_5$	-	-	-		
$\mu$	$H_4$	$H_5$							
-	-	-							
<b>d</b> $m = 3$ ,	<table border="1"><tr><td><math>\mu_1</math></td><td><math>\mu_2</math></td><td><math>H_5</math></td></tr><tr><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr></table>	$\mu_1$	$\mu_2$	$H_5$	-	-	-		
$\mu_1$	$\mu_2$	$H_5$							
-	-	-							
<b>e</b> $m = 4$ ,	<table border="1"><tr><td><math>\mu_1</math></td><td><math>\mu_2</math></td><td><math>H_5</math></td><td><math>H_6</math></td></tr><tr><td>+</td><td>-</td><td>+</td><td>-</td></tr></table>	$\mu_1$	$\mu_2$	$H_5$	$H_6$	+	-	+	-
$\mu_1$	$\mu_2$	$H_5$	$H_6$						
+	-	+	-						

Ongelijkheidsnevenvoorwaarden:

<b>f</b> $m = 2$ ,	<table border="1"><tr><td><math>\mu</math></td><td><math>H_3</math></td></tr><tr><td>-</td><td>+</td></tr></table>	$\mu$	$H_3$	-	+				
$\mu$	$H_3$								
-	+								
<b>g</b> $m = 3$ ,	<table border="1"><tr><td><math>\mu</math></td><td><math>H_4</math></td><td><math>H_5</math></td></tr><tr><td>+</td><td>-</td><td>+</td></tr></table>	$\mu$	$H_4$	$H_5$	+	-	+		
$\mu$	$H_4$	$H_5$							
+	-	+							
<b>h</b> $m = 3$ ,	<table border="1"><tr><td><math>\mu</math></td><td><math>H_4</math></td><td><math>H_5</math></td></tr><tr><td>-</td><td>+</td><td>-</td></tr></table>	$\mu$	$H_4$	$H_5$	-	+	-		
$\mu$	$H_4$	$H_5$							
-	+	-							
<b>i</b> $m = 4$ ,	<table border="1"><tr><td><math>\mu_1</math></td><td><math>\mu_2</math></td><td><math>H_5</math></td><td><math>H_6</math></td></tr><tr><td>-</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td></tr></table>	$\mu_1$	$\mu_2$	$H_5$	$H_6$	-	-	+	+
$\mu_1$	$\mu_2$	$H_5$	$H_6$						
-	-	+	+						
<b>j</b> $m = 4$ ,	<table border="1"><tr><td><math>\mu_1</math></td><td><math>\mu_2</math></td><td><math>H_5</math></td><td><math>H_6</math></td></tr><tr><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td></tr></table>	$\mu_1$	$\mu_2$	$H_5$	$H_6$	+	+	-	+
$\mu_1$	$\mu_2$	$H_5$	$H_6$						
+	+	-	+						

Laat  $k$  steeds het aantal restricties zijn.

Bij een even aantal gelijkheidsnevenvoorwaarden is voor een minimum voldoende dat de laatste leidende hoofdminoren het patroon  $+, +, +, \dots$  hebben, en voor een maximum dat het patroon  $-, +, -, +, \dots$  is. Dit is makkelijk te onthouden in het geval  $k = 0$  en  $f(x) = \langle x, x \rangle$  (voor het minimum) en  $f(x) = -\langle x, x \rangle$  (voor het maximum).

Bij een oneven aantal gelijkheidsnevenvoorwaarden is voor een minimum voldoende dat de laatste leidende hoofdminoren het patroon  $-, -, -, \dots$  hebben, en voor een maximum dat het patroon  $+, -, +, -, \dots$  is. Voor een minimum verspringen de tekens niet, voor een maximum wel, en verder zijn de tekens precies tegengesteld aan het vorige geval

Bij gelijkheidsrestricties spelen de voortekens van de vermenigvuldigers geen rol. Daarmee hebben we al de antwoorden op de eerste vijf vragen: **a**  $k$  oneven, +: max; **b**  $k$  oneven, -: min; **c**  $k$  oneven, -, -: min; **d**  $k$  even, -: max; **e**  $k$  even, +, -: geen extremum.

Bij ongelijkheidsnevenvoorwaarden is voldoende voor een extremum dat de laatste leidende hoofdminoren het al besproken patroon hebben, en dat vervolgens alle vermenigvuldigers positief zijn (maximum), of allemaal negatief zijn (minimum).

Dit levert: **f** vermenigvuldigers negatief, maar  $k$  oneven, +: geen extremum; **g**  $k$  oneven, -, +: geen extremum; **h** vermenigvuldigers negatief, maar  $k$  oneven, +, -: geen extremum; **i** vermenigvuldigers negatief, en  $k$  even, +, +: minimum; **j** vermenigvuldigers positief, en  $k$  even, -, +: maximum.

2. **a** Geef de definitie van het begrip “gesloten verzameling”.

Zie dictaat

- b** Laat zien dat de doorsnede van twee gesloten verzamelingen gesloten is.

Zie dictaat

- c** Laat vanuit de definitie zien dat het interval  $[0, \infty)$  een gesloten deelverzameling is van  $\mathbb{R}$ .

Stel dat  $V = [0, \infty) \subset \mathbb{R}$  niet gesloten is. Dan is er tenminste een convergente rij  $\{x_n\}$ , met  $x_n \in V$ , zodanig dat de limiet  $\ell$  van de rij niet in  $V$  ligt; dat wil in dit geval zeggen dat  $\ell < 0$ .

Kies  $\varepsilon = -\ell/2 > 0$ . Dan is er een  $N > 0$ , zodanig dat voor alle  $n > N$  geldt dat  $|x_n - \ell| < \varepsilon$ , ofwel

$$\ell - \varepsilon < x_n < \ell + \varepsilon = \frac{1}{2}\ell < 0$$

voor alle  $n > N$ . Dit is in tegenspraak met het feit dat  $x_n \geq 0$  voor alle  $n$ .

3. Stel dat een functie  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  is gegeven en stel dat  $a, b \in \mathbb{R}^m$  voldoen aan  $b = f(a)$ . We willen met de impliciete functiestelling de vergelijking

$$y - f(x) = 0$$

naar  $x$  oplossen.

- a** Welke voorwaarden moeten we aan  $f$  opleggen, opdat we op dit probleem de impliciete functiestelling toe kunnen passen?

We moeten de vergelijking

$$F(x, y) = y - f(x) = 0$$

naar  $x$  oplossen. Kies een punt  $a \in \mathbb{R}^m$ , en zet  $b = f(a) \in \mathbb{R}^m$ . Als rond het punt  $(a, b)$  de functie  $F$  continu differentieerbaar is, en als de afgeleide van  $F$  naar de afhankelijke variabele (de variabele waarnaar we de vergelijking willen oplossen) inverteerbaar is, dan kunnen we de impliciete functiestelling toepassen. De laatste conditie is ook te schrijven als

$$\det Df(a) \neq 0.$$

- b** Welke conclusies kunnen we dan met de impliciete functiestelling trekken? Geef zoveel mogelijk gevolgtrekkingen.

De impliciete functiestelling vertelt ons dan dat er een  $\varepsilon > 0$  is en een functie  $\varphi : B_\varepsilon(b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ , zodanig dat

- i.  $\varphi$  is continu differentieerbaar;
- ii.  $\varphi(b) = a$ ;
- iii.  $F(\varphi(y), y) = y - f(\varphi(y)) = 0$  voor alle  $y \in B_\varepsilon(b)$ ;
- iv.

$$D\varphi(b) = -(D_x F(a, b))^{-1} D_y F(a, b) = Df(a)^{-1} \cdot I = Df(a)^{-1}.$$

- c** Stel  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  en dat de oplossing  $x = g(y)$  van  $y = f(x)$  tenminste twee keer differentieerbaar is. Bereken met de techniek van impliciet differentieren de tweede afgeleide van  $g$  in het punt  $y = b$  in termen van de afgeleiden van  $f$  in het punt  $a$ .

In dit geval geldt voor alle  $y$  dat

$$0 = y - f(g(y)).$$

Differentiëren naar  $y$  levert

$$0 = 1 - f'(g(y))g'(y).$$

Nog eens differentiëren levert

$$0 = -f''(g(y)) (g'(y))^2 - f'(g(y))g''(y)$$

In het punt  $y = b$  zien we, omdat  $g(b) = a$ , dat

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

(dit hadden we boven al gevonden), en dat

$$g''(b) = -\frac{f''(a)g'(b)^2}{f'(a)} = -\frac{f''(a)}{(f'(a))^3}.$$

- d** Controleer je resultaat gevonden in 3c voor het geval  $f(x) = x^2$  en  $a = 1$ .

We berekenen  $b = f(a) = 1$ . Rond het punt  $(1, 1)$  kunnen we de vergelijking  $y - x^2 = 0$  oplossen als  $x = g(y) = \sqrt{y}$ . We berekenen de afgeleiden:

$$f'(x) = 2x, \quad f''(x) = 2, \quad g'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \quad g''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}.$$

We zien dat inderdaad

$$g'(1) = \frac{1}{2} = \frac{1}{f'(1)}$$

$$g''(1) = -\frac{1}{4} = -\frac{2}{2^3} = -\frac{f''(1)}{(f'(1))^3}.$$

- 4.** Laat  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeven zijn door  $f(x) = -x_1^2 - x_2$ , en laat  $g_1(x) = x_1 x_2$  en  $g_2(x) = x_1 + 2x_2$ .

$$V = \{x \in \mathbb{R}^2 : g_1(x) \geq 1, g_2(x) \geq 3\}.$$

**a** Laat zien dat  $V$  een convexe verzameling is. Schets  $V$ .

Als  $x \in V$ , dan is, omdat  $x_1 x_2 \geq 1$ , ofwel  $x_1 > 0$  en  $x_2 > 0$ , of  $x_1 < 0$  en  $x_2 < 0$ . Het laatste geval kan echter niet optreden, omdat anders  $g_2(x) < 0$  zou zijn.

Met andere woorden, we weten dat  $V \subset \mathbb{R}_{++}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0, x_2 > 0\}$ . Op  $\mathbb{R}_{++}^2$  is echter de functie  $g_1$  pseudo-concaaf, omdat

$$\det \left( \begin{array}{c|cc} 0 & -x_2 & -x_1 \\ \hline -x_2 & 0 & 1 \\ -x_1 & 1 & 0 \end{array} \right) = 2x_1 x_2 > 0$$

voor alle punten in die verzameling. Bijgevolg is  $g_1$  op  $\mathbb{R}_{++}^2$  quasi-concaaf,  $h_1(x) = 1 - g_1(x)$  is quasi-convex, en de verzameling

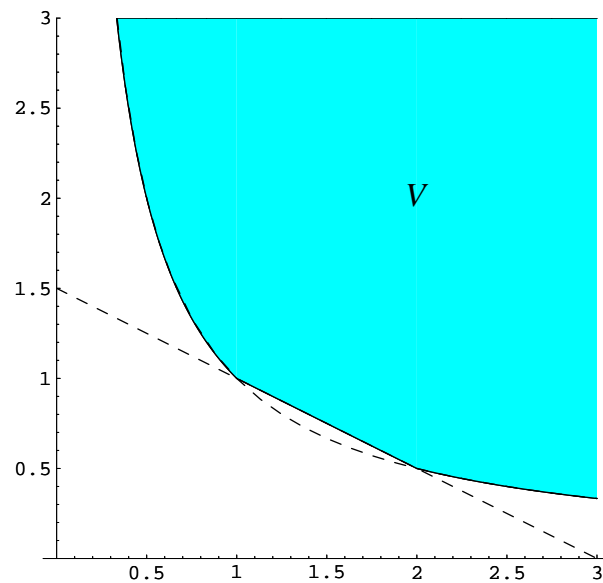
$$W_1 = \{x \in \mathbb{R}_{++}^2 \mid h_1(x) \leq 0\}$$

is convex.

De functie  $h_2(x) = 3 - g_2(x)$  is lineair, dus convex, dus quasi-convex, en

$$W_2 = \{x \in \mathbb{R}_{++}^2 \mid h_2(x) \leq 0\}$$

is dan ook convex. Omdat  $V = W_1 \cap W_2$  de doorsnede is van twee convexe verzamelingen is  $V$  zelf convex.



**b** Laat zien dat  $f$  een pseudo-concave functie is op  $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ .

De Hessiaan van  $f$  wordt gegeven door

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dit is een negatief semi-definiete matrix; dit impliceert dat  $f$  concaaf is, en dan ook pseudo-concaaf.

c Vind alle kritieke punten voor het probleem extrema van  $f$  beperkt tot  $V$  te vinden.

De functie  $f$  is continu differentieerbaar. We zetten (als boven)  $h_1(x) = 1 - x_1x_2$  en  $h_2(x) = 3 - x_1 - 2x_2$ .

- **Inwendige van  $V$ .** Een kritiek punt  $x$  in het inwendige van  $V$  moet voldoen aan

$$0 = \text{grad}f(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Er is echter geen enkel punt dat aan deze vergelijking kan voldoen

- **Rand  $h_1 = 0$  van  $V$**  Kritieke punten  $x$  op deze rand voldoen aan

$$\text{rang } Dh_1(x) < 1, \quad h_1(x) = 0, \quad h_2(x) \leq 0,$$

(gedegenererde punten), of aan

$$\begin{aligned} \text{grad}f(x) &= \lambda_1 \text{grad}h_1(x), \\ h_1(x) &= 0, \\ h_2(x) &\leq 0, \end{aligned}$$

(voorwaarde van Lagrange). De eerste condities leveren

$$\text{rang} \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \end{pmatrix} = 0, \quad x_1x_2 = 1, \quad x_1 + 2x_2 \leq 3.$$

Het enige punten dat niet aan de rangconditie voldoet is  $x = 0$ , maar die voldoet weer niet aan  $x_1x_2 = 1$ . Er zijn geen gedegenererde punten.

De conditie van Lagrange levert

$$\begin{aligned} -2x_1 &= -\lambda_1x_2 \\ -1 &= -\lambda_1x_1 \\ x_1x_2 &= 1 \\ h_2(x) &\leq 0. \end{aligned}$$

Uit de eerste twee vergelijkingen halen we  $x_1 = 1/\lambda_1$  en  $x_2 = 2/\lambda_1^2$ . Invullen in de derde levert dan

$$\frac{2}{\lambda_1^3} = 1.$$

We vinden dat  $\lambda_1 = 2^{\frac{1}{3}}$ ,  $x_1 = 2^{-\frac{1}{3}}$ ,  $x_2 = 2^{\frac{1}{3}}$ . Om te laten zien dat dit punt in  $V$  ligt is het voldoende om te laten zien dat  $1/x_1 > 3/2 - x_1/2$  voor alle  $0 < x_1 < 1$ . Wel, de functie  $w(x) = 1/x - 3/2 + x/2$  heeft afgeleide  $w'(x) = -1/x^2 + 1/2 < 0$  voor  $x \in (0, 1)$ . Verder is  $w(1) = 0$ . Daaruit volgt dat  $w(x) > 0$  voor alle  $x \in (0, 1)$ .

We hebben het kritieke punt  $(2^{-\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{3}})$  gevonden, met vermenigvuldiger  $\lambda_1 = 2^{\frac{1}{3}}$ .

- **Rand  $h_2 = 0$  van  $V$**  Kritieke punten  $x$  op deze rand voldoen aan

$$\text{rang } Dh_2(x) < 1, \quad h_2(x) = 0, \quad h_1(x) \leq 0,$$

(gedegeneerde punten), of aan

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}f(x) &= \lambda_2 \operatorname{grad}h_2(x), \\ h_2(x) &= 0, \\ h_1(x) &\leq 0,\end{aligned}$$

(voorwaarde van Lagrange). De eerste condities leveren

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} -1 & -2 \end{pmatrix} = 0,$$

maar er is geen punt dat hieraan voldoet. Er zijn geen gedegeneerde punten.

De conditie van Lagrange levert

$$\begin{aligned}-2x_1 &= -\lambda_2 \\ -1 &= -2\lambda_2 \\ x_1 + 2x_2 &= 3 \\ h_1(x) &\leq 0.\end{aligned}$$

Uit de eerste twee vergelijkingen halen we  $\lambda_2 = \frac{1}{2}$  en  $x_1 = 1/4$ . Invullen in de derde levert dan

$$x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{8} = \frac{11}{8}.$$

We berekenen

$$h_1\left(\frac{1}{4}, \frac{11}{8}\right) = 1 - \frac{11}{32} > 0,$$

en we concluderen dat het punt  $(1/4, 11/8)$  niet in  $V$  ligt.

We vinden geen kritieke punten op deze rand.

- **Hoekpunten van  $V$ .** Hoekpunten van  $V$  voldoen aan de vergelijkingen  $h_1(x) = h_2(x) = 0$ . Deze leveren

$$\begin{aligned}x_1x_2 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 &= 3.\end{aligned}$$

Eliminatie van  $x_2$  uit de eerste vergelijking levert

$$\begin{aligned}x_1 + \frac{2}{x_1} &= 3, \\ x_1^2 - 3x_1 + 2 &= 0, \\ (x_1 - 1)(x_1 - 2) &= 0.\end{aligned}$$

Dit levert de punten  $x = (1, 1)$  en  $x = (2, \frac{1}{2})$ .

We verifiëren of de gradiënten van de restricties lineair onafhankelijk zijn in deze punten (niet-gedegeneerdheid), door de rang van  $Dh$  te bepalen, waar  $h(x) = (h_1(x), h_2(x))$ .

We zien dat

$$\operatorname{rang} Dh(x) = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} -x_2 & -x_1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rang} Dh(1, 1) = 2, \quad \operatorname{rang} Dh(2, \frac{1}{2}) = 2.$$

We kunnen nu de bijbehorende Lagrangevermenigvuldigers bepalen uit

$$\text{grad}f(x) = \lambda_1 \text{grad}h_1 + \lambda_2 \text{grad}h_2,$$

ofwel

$$\begin{pmatrix} -2x_1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 & -1 \\ -x_1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Dit levert voor  $x = (1, 1)$  dat  $\lambda_1 = 3$  en  $\lambda_2 = -1$ ; voor  $x = (2, \frac{1}{2})$  krijgen we dat  $\lambda_1 = -7$  en  $\lambda_2 = 15/2$ .

**d** Bepaal met de test op de vermenigvuldigers en de tweede-orde voorwaarden van alle kritieke punten of  $f$  in dat punt een lokaal maximum of een lokaal minimum aanneemt.

Voor het kritieke punt  $(2^{-\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{3}})$  moeten we de laatste leidende hoofdminor uitrekenen van de gerande Hessiaan

$$R = \left( \begin{array}{c|cc} 0 & -Dh_1 & \\ \hline -Dh_1^T & Hf - \lambda_1 Hh_1 & \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|cc} 0 & x_2 & x_1 \\ \hline x_2 & -2 & \lambda_1 \\ x_1 & \lambda_1 & 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|cc} 0 & 2^{\frac{1}{3}} & 2^{-\frac{1}{3}} \\ \hline 2^{\frac{1}{3}} & -2 & 2^{\frac{1}{3}} \\ 2^{-\frac{1}{3}} & 2^{\frac{1}{3}} & 0 \end{array} \right)$$

We zien dat  $\det R = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} = 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} > 0$ .

De volgende tabel vat het antwoord samen:

Punt	Tekens vermenigvuldigers	Tekens hoofdminoren	Conclusie
$(2^{-\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{3}})$	+	+	lokaal maximum
$(1, 1)$	+, -	geen	geen extremum
$(2, \frac{1}{2})$	-, +	geen	geen extremum

**e** Bepaal het globale maximum van  $f$  op  $V$ . Bewijs je antwoord (dat wil zeggen, bewijs dat een lokaal maximum gevonden bij de vorige opgave inderdaad een globaal maximum is).

De functie  $f$  is pseudoconcaaf. De functies  $h_1$  en  $h_2$  zijn quasi-convex. Voor  $x = (2^{-\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{3}})$  en  $\lambda_1 = 2^{\frac{1}{3}}$ ,  $\lambda_2 = 0$  geldt dat

$$\text{grad}f(x) = \lambda_1 \text{grad}g_1(x) + \lambda_2 \text{grad}g_2(x),$$

$$h_1(x) \leq 0,$$

$$h_2(x) \leq 0,$$

$$\lambda_1 \geq 0,$$

$$\lambda_2 \geq 0.$$

Volgens de stelling over pseudoconcaaf programmering neemt dan de functie  $f$  beperkt tot  $V$  in  $x$  een globaal maximum aan.