FACULTEIT DER ECONOMISCHE WETENSCHAPPEN EN ECONOMETRIE
Afdeling Kwantitatieve Economie

Wiskunde AEO V

Tentamen
31 oktober 2006, 9^{30}–12^{30}

Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven. Wees precies. Vermeld welke stellingen je gebruikt, en verifieer van elke stelling die je gebruikt eerst de hypotheses. Een antwoord is **geheel fout** als er geen argumenten worden gegeven. Voorbeelden of tekeningen gelden **niet** als argumenten. Juist beantwoorde deelvragen brengen 5 punten op, tenzij anders vermeld. **Rekenmachines zijn niet toegestaan.**

1. *Een stelling* (10 punten)
Formuleer de stelling van Lagrange.

2. *Topologie* (20 punten)

- **a** Geef de definities van de begrippen “randpunt” en “inwendig punt”.
- **b** Geef alle randpunten van de verzameling $[\frac{1}{2}, \infty)$. Bewijs dat het inderdaad randpunten zijn.
- **c** Geef het bewijs van de stelling dat als G een gesloten verzameling is en $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ een continue functie, dat dan het inverse beeld $f^{-1}(G)$ ook gesloten is.
- **d** Laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door $f(x) = x/|x|$ als $x \neq 0$ en $f(0) = 0$. Is de verzameling $f^{-1}([\frac{1}{2}, \infty))$ gesloten?

3. *Evenwicht* (20 punten)
Laat de functies $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu differentieerbare functies zijn, en laat gegeven zijn dat $g(0) = 0$, $f(1) = 0$ en $f'(x) < 0$ en $g'(x) > 0$ voor alle $x \geq 0$. Beschouw de vergelijking

$$f(x) = g(x) + a.$$

- **a** Laat zien dat voor $a = 0$ deze vergelijking een unieke oplossing x_0 heeft.
- **b** Laat zien dat rond $a = 0$ de variabele x uit de vergelijking kan worden opgelost als een functie $x = \varphi(a)$. Welke stelling gebruik je daarvoor?
- **c** Geef zoveel mogelijk eigenschappen van de in **3b** gevonden functie φ. Is de functie φ stijgend, dalend, of kritiek in $a = 0$?
- **d** Bereken de tweede afgeleide van φ in het punt $a = 0$ in termen van de afgeleides van de functies f en g en het punt x_0.

⇒

4. *Optimalisatie onder nevenvoorwaarden.* (40 punten)
Laat $f, g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door

$$f(x) = x_1 + \frac{x_2^2}{4}, \qquad g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1, \qquad g_2(x) = -x_1.$$

Laat verder de verzamelingen V_1 en V_2 gegeven zijn door

$$V_j = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; g_j(x) \leq 0 \right\}.$$

- **a** Bewijs dat de verzamelingen V_1 en V_2 gesloten zijn.
- **b** Zijn de verzamelingen V_1 en V_2 convex? Compact? Zo ja, geef bewijzen, zo nee, tegenargumenten.
- **c** (10 punten) Bepaal alle kandidaatextrema (kritieke punten) van f beperkt tot V_1 en alle kandidaatextrema van f beperkt tot V_2.
- **d** (10 punten) Bepaal van de kandidaatextrema van f beperkt tot V_1 respectievelijk van de kandidaatextrema van f beperkt tot V_2, gevonden onder **2b**, de lokale geaardheid.
- **e** Is de functie f concaaf, convex, beide, of geen van beide?
- **f** Heeft f beperkt tot $V_1 \cap V_2$ globale extrema? Zo ja, bewijs dit en geef aan welke dit zijn.

5. *Concaviteit* (10 punten)

- **a** Geef de definitie van het begrip quasi–convexe functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
- **b** Geef een voorbeeld van een functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die niet convex, maar wel quasi–convex is.