



# FACULTEIT ECONOMIE EN BEDRIJFSKUNDE

Afdeling Kwantitatieve Economie

## Wiskunde AEO V

### Uitwerking tentamen

6 januari 2010

#### 1. Een stelling (12 punten)

Laat  $c$  een differentieerbare kromme zijn, die op een niveauverzameling van een differentieerbare functie  $g$  loopt. Formuleer een stelling over raakvectoren aan  $c$  en gradiënten van  $g$ .

Als  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  en  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  differentieerbare functies zijn, zodanig dat

$$g(c(t)) = 0$$

voor alle  $t \in \mathbb{R}$ , dan is voor elke  $t \in \mathbb{R}$  de gradiënt  $\text{grad}g(c(t))$  loodrecht op de raakvector  $c'(t)$ :

$$\langle \text{grad}g(c(t)), c'(t) \rangle = 0.$$

#### 2. Winstmaximalisatie. (16 punten)

De marginale opbrengst van een bepaald product is  $r(q) = (2 + q)^{\frac{1}{3}}$ , de marginale productiekosten  $k(q) = cq$ . Voor  $c = 1/3$  en  $q = 6$  is marginale opbrengst gelijk aan marginale kosten;  $q = 6$  is in dit geval de optimale productiehoeveelheid.

a Laat zien: voor waarden van  $c$  in de buurt van  $1/3$  hangt de optimale productiehoeveelheid differentieerbaar af van  $c$ .

Marginale opbrengst gelijk aan marginale kosten:

$$(2 + q)^{\frac{1}{3}} = cq,$$

oftewel

$$f(c, q) = (2 + q)^{\frac{1}{3}} - cq = 0.$$

Uit deze vergelijking kunnen we rond het punt  $(c, q) = (1/3, 6)$  de variabele  $q$  als functie van  $c$  oplossen, als  $\frac{\partial f}{\partial q}(1/3, 6) \neq 0$ . We hebben:

$$\frac{\partial f}{\partial q}(c, q) = \frac{1}{3}(2 + q)^{-\frac{2}{3}} - c$$

en

$$\frac{\partial f}{\partial q}(1/3, 6) = \frac{1}{12} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{4}.$$

Met de impliciete functiestelling concluderen we dat  $q$  uit  $f(c, q) = 0$  kan worden opgelost als een differentieerbare functie.

- b** Bereken de eerste afgeleide van  $q(c)$  voor  $c = 1/3$ , en geef een economische interpretatie van het resultaat.

$$q'(1/3) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial c}(1/3, 6)}{\frac{\partial f}{\partial q}(1/3, 6)} = -\frac{-6}{-1/4} = -24.$$

Inderdaad: de optimale productiehoeveelheid daalt als de marginale productiekosten stijgen.

**3. Optimalisatie onder nevenvoorwaarden. (56 punten)**

Laat  $a \in \mathbb{R}$  een vaste constante zijn, en laat  $f, g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeven zijn door

$$f(x) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}, \quad g_1(x) = x_1 - 1, \quad g_2(x) = (x_2 - a)^2 - x_1$$

Laat verder de verzamelingen  $V_1$  en  $V_2$  gegeven zijn door

$$V_j = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid g_j(x) \leq 0 \right\}.$$

- a** Bewijs voor alle  $a \in \mathbb{R}$  dat de verzameling

$$V = V_1 \cap V_2$$

gesloten is. Schets  $V$  als  $a = 0$ .

Omdat

$$V_1 = g_1^{-1}((-\infty, 0]),$$

omdat  $g_1$  continu is en omdat de verzameling  $(-\infty, 0]$  in  $\mathbb{R}$  gesloten is, volgt dat  $V_1$  ook gesloten is. Op dezelfde manier laat je zien dat

$$V_2 = g_2^{-1}((-\infty, 0]),$$

gesloten is.

De doorsnede van twee gesloten verzamelingen is ook gesloten. Conclusie:  $V = V_1 \cap V_2$  is gesloten. Zie figuur 1 voor een schets.

- b** Laat voor alle  $a \in \mathbb{R}$  zien dat de verzameling  $V$  compact is, en dat de functie  $f$  beperkt tot  $V$  een (globaal) maximum  $m(a)$  heeft.

Uit  $g_2(x) \leq 0$  volgt dat  $x_1 \geq (x_2 - a)^2 \geq 0$  voor  $x \in V$ . Uit  $g_1(x) \leq 0$  volgt dat

$$x_1 \leq 1;$$

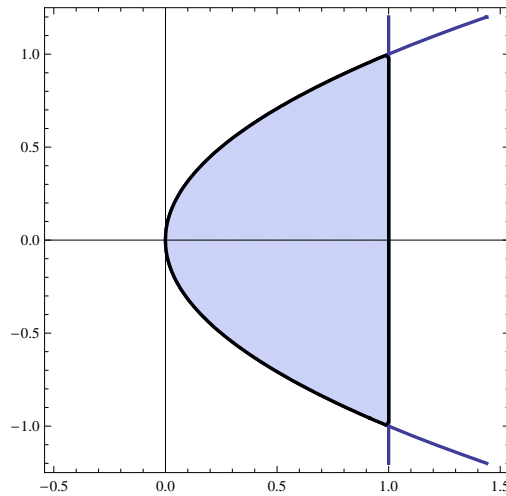
we krijgen dat  $0 \leq x_1 \leq 1$ . Gebruik makende van  $x_1 \leq 1$  en weer van  $g_2(x) \leq 0$ , volgt dat

$$(x_2 - a)^2 \leq x_1 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |x_2 - a| \leq 1,$$

zodat  $-1 + a \leq x_2 \leq a + 1$ . We concluderen dat  $x_2^2 \leq (1 + |a|)^2$ . (Merk op dat de ongelijkheid  $x_2^2 \leq (1 + a)^2$  niet geldt voor negatieve  $a$ .)

Conclusie: als  $x \in V$ , dan is

$$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 \leq 1 + (|a| + 1)^2.$$



**Figuur 1:** Schets voor 3a).

Maar dan is  $V$  begrensd.

Volgens de stelling van Weierstraß (Extreme-waarden stelling) neemt een continue functie op een compacte verzameling een maximale en een minimale waarde aan. De functie  $f$  is continu en de verzameling  $V$  is compact (gesloten en begrensd). Daarom heeft de functie  $f$  beperkt tot  $V$  een globaal maximum  $m(a)$ .

**c** (16 punten) Zet  $a = 0$ . Bepaal alle kandidaatextrema (kritieke punten) van  $f$  beperkt tot  $V$ .

De Lagrangefunctie van dit probleem (met  $a = 0$ ) is:

$$L(\lambda_1, \lambda_2; x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} - \lambda_1(x_1 - 1) - \lambda_2(x_2^2 - x_1).$$

**Inwendige.** Geen restrictie bindend,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .

De functie  $f$  is overal differentieerbaar. Verder is

$$0 = (D_x L(0; x))^T = \text{grad} f(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Dit levert  $x = (0, 0)$ . Maar omdat  $g_2(0, 0) = 0$  ligt dit punt niet in het inwendige van  $V$ .

**Randen.** Eén restrictie bindend.

- $g_1(x) = 0, \lambda_2 = 0$ . Nietgedegeneerdheidsconditie.

$$Dg_1(x) = (1 \quad 0).$$

Deze matrix heeft rang 1 in ieder punt van  $V$ .

Conditie van Lagrange:

$$0 = (D_x L(\lambda_1, 0; x))^T = \text{grad} f(x) - \lambda_1 \text{grad} g_1(x) = \begin{pmatrix} x_1 - \lambda_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Dit levert  $x_2 = 0$  en  $x_1 = \lambda_1$ . Uit de restrictie  $g_1 = 0$  vinden we het kritieke punt  $(0, 1) \in V$  bij  $\lambda_1 = 1$ .

- $g_2(x) = 0, \lambda_1 = 0.$

Nietgedegeneerdheidsconditie

$$Dg_2 = (-1 \quad 2x_2);$$

deze matrix heeft altijd rang 1.

Conditie van Lagrange:

$$0 = (D_x L(0, \lambda_2; x))^T = \text{grad} f(x) - \lambda_2 \text{grad} g_2(x) = \begin{pmatrix} x_1 + \lambda_2 \\ x_2 - 2\lambda_2 x_2 \end{pmatrix}.$$

De tweede component levert  $x_2 = 0$  of  $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ . In het eerste geval levert de restrictie  $g_2 = 0$  het kritieke punt  $(0, 0) \in V$  bij Lagrangevermenigvuldiger  $\lambda_2 = -x_1 = 0$ . In het tweede geval vinden we dat  $x_1 = -\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ , maar  $V$  bevat geen punten met  $x_1 < 0$ .

**Hoekpunten.** Twee restricties bindend.

Nietgedegeneerdheidsconditie:

$$Dg = \begin{pmatrix} Dg_1 \\ Dg_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2x_2 \end{pmatrix}.$$

De rang van deze matrix is dan en slechts dan gelijk aan 1 als  $x_2 = 0$ ; anders is de rang gelijk aan 2. Als  $x_2 = 0$  hebben we  $x_1 = 0$ , maar het punt  $(0, 0)$  is geen hoekpunt. Conclusie: in de hoekpunten is aan de nietgedegeneerdheidsconditie voldaan.

Het stelsel

$$\begin{aligned} 0 &= g_1(x) = x_1 - 1, \\ 0 &= g_2(x) = x_2^2 - x_1, \end{aligned}$$

heeft als oplossingen  $x_+ = (1, 1)$  en  $x_- = (1, -1)$ . De bijbehorende Lagrangevermenigvuldigers zijn oplossingen van

$$0 = D_x L(\lambda; x_{\pm}) = (1 - \lambda_1 + \lambda_2 \quad x_2 - \lambda_2 \cdot 2x_2.)$$

We vinden dat  $\lambda_2 = \frac{1}{2}$  en  $\lambda_1 = \frac{3}{2}$  in beide hoekpunten.

De lijst van alle kritieke punten in  $V$  wordt gegeven in tabel 1.

**Tabel 1:** Overzicht van de resultaten.

$x$	$f(x)$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\frac{\partial L}{\partial x_1}$	$\frac{\partial L}{\partial x_2}$
$(0, 0)$	0	0	0	-1	0
$(1, 0)$	$\frac{1}{2}$	1	0	0	-1
$(1, 1)$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$(1, -1)$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0

- d** (16 punten) Zet  $a = 0$ . Bepaal van de kandidaatextrema van  $f$  beperkt tot  $V_1 \cap V_2$  de lokale gaardheid met behulp van Lagrangevermenigvuldigers en gerande hessianen.

We zullen hier de volgende hessianen gebruiken:

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad Hg_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Analyse van het kritieke punt**  $(0, 0)$ .

Omdat  $f(x) \geq 0$  op  $V$  (en ook in  $\mathbb{R}^2$ ) en  $f(0, 0) = 0$ , neemt  $f$  in het punt  $(0, 0)$  een globaal minimum aan.

We kunnen ook de hessiaan gebruiken. De restrictie  $g_2 = 0$  is bindend in  $(0, 0)$ , maar  $\lambda_2 = 0$ . Daarom passen we het vrije optimalisatie criterium toe. We beschouwen  $H = Hf(x)$  met de leidende hoofdminoren  $H_1 = 1$  en  $H_2 = 1$ . Het patroon “+, +” impliceert dat de functie  $f$  in het punt  $(0, 0)$  een lokaal minimum aanneemt.

**Analyse van het kritieke punt**  $(1, 0)$ .

De restrictie  $g_1 = 0$  is bindend in  $(1, 0)$  en de bijbehorende Lagrangevermenigvuldiger  $\lambda_1 = 1 > 0$ . De laatste  $m - 1 = 1$  hoofdminoren van  $HL(\lambda_1, \lambda_2; 1, 0)$  zijn van belang. We beschouwen

$$HL = \left( \begin{array}{c|cc} 0 & & -\nabla g_1(1, 0)^T \\ \hline -\nabla g_1(1, 0)^T & & Hf(1, 0) - \lambda_1 Hg_1(1, 0) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|cc} 0 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

De laatste leidende hoofdminor is

$$H_3 = \det \left( \begin{array}{c|cc} 0 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = -1.$$

De laatste leidende hoofdminor is negatief maar de Lagrangevermenigvuldiger is positief. Conclusie: geen maximum en geen minimum.

**Analyse van de kritieke punten**  $(1, 1)$  en  $(1, -1)$ .

Voor deze twee hoekpunten zijn alleen de vermenigvuldigers van belang. In beide punten zijn beide vermenigvuldigers positief. Daarom zijn beide punten lokale maxima.

Met behulp van **(3b)** kunnen we concluderen dat de functie  $f$  beperkt tot  $V$  met  $a = 0$  zowel een globaal maximum  $m(0) = 1$  in het punt  $(1, 1)$  als ook in het punt  $(1, -1)$  aanneemt.

- e** Gebruik de enveloppestelling om het antwoord op de volgende beide vragen te geven.

*i.* Als we  $a$  vanaf  $a = 0$  laten toenemen, stijgt of daalt  $m(a)$ ?

De Lagrangefunctie van dit probleem (met parameter  $a$ ) is:

$$L(\lambda_1, \lambda_2; x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} - \lambda_1(x_1 - 1) - \lambda_2((x_2 - a)^2 - x_1).$$

Volgens de enveloppestelling

$$\frac{d}{da} f(m(a)) = \frac{\partial L}{\partial a}(\lambda_1, \lambda_2; x_1, x_2) = 2\lambda_2(x_2 - a).$$

Als  $a = 0$  hebben we twee punten van een globaal maximum gevonden:  $(1, 1)$  en  $(1, -1)$  bij vermenigvuldiger  $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ . We concluderen dat

$$\left. \frac{d}{da} f(m(a)) \right|_{a=0} = x_2,$$

waarin  $x_2 = 1$  of  $x_2 = -1$ .

Als we nu  $a$  laten toenemen, vinden we dat

$$\left. \frac{d}{da} f(m(a)) \right|_{a=0, x_2=1} = 1 > 0.$$

Conclusie:  $m(a)$  stijgt.

ii. Als we  $a$  vanaf  $a = 0$  laten afnemen, stijgt of daalt  $m(a)$ ?

Als we nu  $a$  laten afnemen, vinden we dat

$$\left. \frac{d}{da} f(m(a)) \right|_{a=0, x_2=-1} = -1 < 0.$$

Conclusie:  $m(a)$  stijgt.

**4. Topologie (16 punten)** Laat  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  continu zijn, en laat  $V = \{x \in \mathbb{R}^m \mid g(x) \leq 0\}$ .

**a** Geef de definities van de begrippen “randpunt” en “inwendig punt”.

Het punt  $a \in \mathbb{R}^m$  is randpunt van een verzameling  $V$ , als voor elke  $r > 0$  geldt dat de bol  $B_r(a)$  punten met  $V$  en met het complement van  $V$  gemeen heeft.

**b** Is de volgende stelling waar of niet waar:

*Als  $g(a) = 0$ , dan is  $a$  een randpunt van  $V$ .*

*Zo ja, geef een bewijs, zo nee, geef een tegenvoorbeeld.*

De stelling is niet waar: als  $g(x) = -x^2$ , dan is  $V = \mathbb{R}$ . Het punt  $a = 0$ , waarvoor geldt dat  $g(0) = 0$ , is dan geen randpunt van  $V$ .