FACULTEIT ECONOMIE EN BEDRIJFSKUNDE

Afdeling Kwantitatieve Economie

Wiskunde AEO V

Tentamen
6 januari 2010, 9^{00}–12^{00}

Dit tentamen bestaat uit vier opgaven. Voorbeelden of tekeningen gelden **niet** als argumenten. Juist beantwoorde deelvragen brengen 8 punten op, tenzij anders vermeld. **Rekenmachines zijn niet toegestaan.**

1. *Een stelling* (12 punten)
   Laat c een differentieerbare kromme zijn, die op een niveauverzameling van een differentieerbare functie g loopt. Formuleer een stelling over raakvectoren aan c en gradiënten van g.

2. *Winstmaximalisatie.* (16 punten)
   De marginale opbrengst van een bepaald product is $r(q) = (2+q)^{\frac{1}{3}}$, de marginale productiekosten $k(q) = cq$. Voor $c = 1/3$ en $q = 6$ is marginale opbrengst gelijk aan marginale kosten; $q = 6$ is in dit geval de optimale productiehoeveelheid.

   a Laat zien: voor waarden van c in de buurt van $1/3$ hangt de optimale productiehoeveelheid differentieerbaar af van c.

   b Bereken de eerste afgeleide van $q(c)$ voor $c = 1/3$, en geef een economische interpretatie van het resultaat.

3. *Optimalisatie onder nevenvoorwaarden.* (56 punten)
   Laat $a \in \mathbb{R}$ een vaste constante zijn, en laat $f, g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door

   $$f(x) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}, \qquad g_1(x) = x_1 - 1, \qquad g_2(x) = (x_2 - a)^2 - x_1$$

   Laat verder de verzamelingen V_1 en V_2 gegeven zijn door

   $$V_j = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; g_j(x) \leq 0 \right\}.$$

   a Bewijs voor alle $a \in \mathbb{R}$ dat de verzameling

   $$V = V_1 \cap V_2$$

   gesloten is. Schets V als $a = 0$.

   b Laat voor alle $a \in \mathbb{R}$ zien dat de verzameling V compact is, en dat de functie f beperkt tot V een (globaal) maximum $m(a)$ heeft.

c (16 punten) Zet $a = 0$. Bepaal alle kandidaatextrema (kritieke punten) van f beperkt tot V.

d (16 punten) Zet $a = 0$. Bepaal van de kandidaatextrema van f beperkt tot $V_1 \cap V_2$ de lokale geaardheid met behulp van Lagrangevermenigvuldigers en gerande hessianen.

e Gebruik de enveloppestelling om het antwoord op de volgende beide vragen te geven.

i. Als we a vanaf $a = 0$ laten toenemen, stijgt of daalt $m(a)$?

ii. Als we a vanaf $a = 0$ laten afnemen, stijgt of daalt $m(a)$?

4. *Topologie* (16 punten) Laat $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ continu zijn, en laat $V = \{x \in \mathbb{R}^m \mid g(x) \leq 0\}$.

a Geef de definities van de begrippen “randpunt” en “inwendig punt”.

b Is de volgende stelling waar of niet waar:

Als $g(a) = 0$, dan is a een randpunt van V.

Zo ja, geef een bewijs, zo nee, geef een tegenvoorbeeld.