



Wiskunde AEO V

Uitwerking tentamen 5 januari 2011

1. Formuleer een stelling over de relatieve positie van grafiek en raakvlak aan de grafiek van een concave functie $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$.

Antwoord

Een C^1 functie $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ is concaaf dan en slechts dan als de grafiek van f onder elk raakvlak aan de grafiek ligt.

2. Twee bedrijven concurreren op dezelfde markt. Bedrijf 1 produceert de hoeveelheid q_1 van het goed, bedrijf 2 produceert q_2 . De markt wordt gekarakteriseerd door de inverse vraagfunctie

$$p = P(q_1 + q_2) = A - q_1 - q_2$$

die de prijs p als hoeveelheid van het aanbod geeft. De parameter $A > 0$ kan geïnterpreteerd worden als de grootte van de markt. De winst van bedrijf i , $i = 1, 2$, kan worden uitgedrukt als

$$\pi_i(q_i) = pq_i - c_i(q_i) = P(q_1 + q_2)q_i - c_i(q_i),$$

waar $c_i(q_i)$ de kosten zijn om een hoeveelheid q_i te produceren. De kosten zijn stijgende convexe functies van de hoeveelheden.

- a Neem aan dat bedrijf 1 zijn winst maximaliseert onder de aanname dat de geproduceerde hoeveelheid q_2 van het andere bedrijf constant is, dat wil zeggen, niet van q_1 afhangt. De productiehoeveelheid q_1 voldoet dan aan de volgende vergelijking:

$$A - 2q_1 - q_2 - c'_1(q_1) = 0. \tag{1}$$

Stel dat gegeven is dat $A > c'_1(0) + q_2$. Laat zien dat de vergelijking voor elke $A > 0$ en $q_2 > 0$ een unieke oplossing $q_1(A, q_2) > 0$ heeft.

Antwoord

Laat voor gegeven A en q_2 de functie $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven zijn door

$$f(q_1) = A - 2q_1 - q_2 - c'_1(q_1).$$

Er geldt dat

$$f(0) = A - q_2 - c'_1(0) > 0,$$

en omdat

$$f(q_1) \leq A - 2q_1 - q_2$$

geldt ook dat

$$f\left(\frac{1 + A - q_2}{2}\right) = -1 - c'_1((1 + A - q_2)/2) \leq -1.$$

Uit de tussenwaardstelling volgt dat f een nulpunt q_1^* waarvoor geldt dat

$$0 < q_1^* < \frac{1 + A - q_2}{2}.$$

Omdat

$$f'(q_1) = -2 - c_1''(q_1) < 0$$

is de functie f strict monotoon dalend, en het gevonden nulpunt is uniek.

- b Laat zien dat de functie q_1 , gevonden in de vorige opgave, continu differentieerbaar van A en q_2 afhangt, en bereken $\frac{\partial q_1}{\partial A}$ en $\frac{\partial q_1}{\partial q_2}$ in termen van q_1 , q_2 en A .

Antwoord

Laat

$$F(q_1, q_2, A) = A - 2q_1 - q_2 - c_1'(q_1).$$

We hebben in de vorige opgave voor elke q_2 en A een q_1^* gevonden zodanig dat

$$F(q_1^*, q_2, A) = 0.$$

Omdat

$$\frac{\partial F}{\partial q_1} = -2 - c_1''(q_1) < 0$$

kan q_1 met de impliciete functiestelling als een differentieerbare functie van q_2 en A uit $F = 0$ worden opgelost. We hebben voor de afgeleides dat

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_1}{\partial A} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial A}}{\frac{\partial F}{\partial q_1}} = \frac{1}{2 + c_1''(q_1)}, \\ \frac{\partial q_1}{\partial q_2} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial q_2}}{\frac{\partial F}{\partial q_1}} = -\frac{1}{2 + c_1''(q_1)}. \end{aligned}$$

- c Neem nu aan dat ook bedrijf 2 zijn winst maximaliseert onder de aanname dat q_1 niet van q_2 afhangt. Dan voldoet q_2 uiteraard aan

$$A - q_1 - 2q_2 - c_2'(q_2) = 0. \quad (2)$$

Als gegeven is dat je voor $A > 0$ de variabelen q_1 en q_2 uit de vergelijkingen (1) en (2) kunt oplossen, bereken $q_1'(A)$ en $q_2'(A)$. Hoe veranderen de hoeveelheden q_i als de markt groter wordt? Welke hoeveelheid stijgt het sterkst (in absolute termen)?

Antwoord

Laat

$$G(q_1, q_2, A) = \begin{pmatrix} A - 2q_1 - q_2 - c_1'(q_1) \\ A - q_1 - 2q_2 - c_2'(q_2) \end{pmatrix}.$$

Er is gegeven dat q_1 en q_2 als functies van A uit de vergelijking $G = 0$ opgelost kunnen worden. Met de impliciete functiestelling kunnen we de afgeleides uitrekenen als

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial A}(A) \\ \frac{\partial q_2}{\partial A}(A) \end{pmatrix} = -(D_{q_1, q_2} G)^{-1} D_A G.$$

We berekenen

$$D_{q_1, q_2} G = \begin{pmatrix} -2 - c_1''(q_1) & -1 \\ -1 & -2 - c_2''(q_2) \end{pmatrix}, \quad D_A G = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial A}(A) \\ \frac{\partial q_2}{\partial A}(A) \end{pmatrix} &= -\frac{1}{3 + 2(c_1'' + c_2'') + c_1' c_2'} \begin{pmatrix} -2c_2'' & 1 \\ 1 & -2c_1'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3 + 2(c_1'' + c_2'') + c_1' c_2'} \begin{pmatrix} 1 + c_2'' \\ 1 + c_1'' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

We zien dat zowel q_1 en q_2 stijgende functies van A zijn, en dat q_1 harder stijgt dan q_2 als $c_2'' > c_1''$ en vice versa.

3. (42 punten) Laat $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven zijn als

$$f(x) = -(x_1 + x_2),$$

en laat voor $a \in \mathbb{R}$ de verzameling V gegeven zijn door

$$V = \{x \in \mathbb{R}^2 : ax_1 + 4x_2 \leq 8, x_1 x_2 \geq 1\}.$$

We kijken naar het probleem de extrema van f beperkt tot V te vinden. We nemen voor de eerste vier vragen $a = 3$ vast.

a Laat zien dat V gesloten is. Is V compact? Geef argumenten voor je antwoord.

Antwoord

Laat $g_1(x) = 3x_1 + 4x_2 - 8$ en $g_2(x) = 1 - x_1 x_2$. Beide functies zijn continu. Dan is

$$V = V_1 \cap V_2 = g_1^{-1}(-\infty, 0] \cap g_2^{-1}(-\infty, 0]$$

gesloten als doorsnede van gesloten verzamelingen.

De punten $(-n, -n)$ voor $n = 1, 2, 3, \dots$ liggen in V omdat

$$g_1(-n, -n) = -7n - 8 \leq 0, \quad g_2(-n, -n) = 1 - n^2 \leq 0$$

voor $n \geq 1$. Maar dan kan V niet begrensd zijn, en ook niet compact.

b Heeft de functie f beperkt tot V globale extrema? Bewijs je antwoord.

Antwoord

Omdat

$$f(-n, -n) = 2n \rightarrow \infty$$

als $n \rightarrow \infty$ kan f geen globaal maximum hebben. Merk op dat in de verzameling $Q_3 = \{x \mid x_1 \leq 0, x_2 \leq 0\}$ de functie altijd positieve waarden aanneemt, terwijl in $Q_1 = \{x \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ de functiewaarden nooit positief zijn.

De verzameling $V \cap Q_1$ is wel compact; geslotenheid is duidelijk. Voor de begrensdheid merken we op dat uit $x \in Q_1 \cap V_1$ volgt dat

$$0 \leq x_1 \leq \frac{8}{3} < 3, \quad 0 \leq x_2 \leq 2,$$

en daarom

$$\|x\| \leq \sqrt{9+4} = \sqrt{13}.$$

Op $V \cap Q_1$ neemt f in het bijzonder een negatief globaal minimum m aan. Omdat alle waarden van f op $V \cap Q_3$ niet-negatief zijn, zijn ze groter dan m , en is m een globaal minimum van f op V .

c (10 punten) Bepaal de kritieke punten van f beperkt tot V .

Antwoord

Lagrangefunctie

$$L = -x_1 - x_2 - \mu_1(3x_1 + 4x_2 - 8) - \mu_2(1 - x_1x_2).$$

Conditie

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x_1} = -1 - 3\mu_1 + \mu_2x_2$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x_2} = -1 - 4\mu_1 + \mu_2x_1$$

$$0 = \mu_1 \frac{\partial L}{\partial \mu_1} = -\mu_1(3x_1 + 4x_2 - 8)$$

$$0 = \mu_2 \frac{\partial L}{\partial \mu_2} = -\mu_2(1 - x_1x_2)$$

Inwendige: $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Geen kritieke punten.

Rand: $g_1 = 0$, $\mu_2 = 0$. Omdat $Dg_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \neq 0$ is aan de rangconditie voldaan. Geen kritieke punten.

Rand: $g_2 = 0$, $\mu_1 = 0$. We hebben dat $Dg_2 = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \end{pmatrix} = 0$ alleen als $x = 0$. Omdat $g_2(0,0) = 1$ concluderen we dat voor alle punten waarvoor $g_2 = 0$ aan de rangconditie voldaan is.

We vinden

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{\mu_2}.$$

Substitutie in $g_2 = 0$ levert dat

$$\mu_2^2 = 1 \Rightarrow \mu_2 = 1 \quad \text{of} \quad \mu_2 = -1.$$

Kritieke punten: $x = (1, 1)$, $\mu_2 = 1$ of $x = (-1, -1)$, $\mu_2 = -1$.

Hoekpunten: $g_1 = g_2 = 0$. Merk op dat we vanwege $x_1x_2 = 1$ hebben dat $x_1 \neq 0$ en $x_2 \neq 0$. We lossen op:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 8 = 0 \\ x_2 = \frac{1}{x_1} \end{cases} \sim \begin{cases} 3x_1^2 - 8x_1 + 4 = 0 \\ x_2 = \frac{1}{x_1} \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = 2 & \text{of } x_1 = \frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{1}{2} & \text{of } x_2 = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Kritieke punten $x = (2, \frac{1}{2})$ of $x = (\frac{2}{3}, \frac{3}{2})$.

Laat $G(x) = (g_1(x), g_2(x))$. Aan de rangconditie is voldaan als $\text{ran}DG(x) = 2$.

We berekenen

$$DG = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

en

$$\text{ran}DG(2, \frac{1}{2}) = \text{ran} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} = 2, \quad \text{ran}DG(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}) = \text{ran} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ \frac{2}{3} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = 2.$$

In alle hoekpunten is aan de rangconditie voldaan.

We berekenen ook de vermenigvuldigers; dit zijn de oplossingen van de vergelijking

$$\begin{pmatrix} -3 & x_2 \\ -4 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

We vinden voor $x = (2, 1/2)$ dat $(\mu_1, \mu_2) = (-3/8, -1/4)$ en voor $x = (2/3, 3/2)$ dat $(\mu_1, \mu_2) = (-5/24, 1/4)$.

- d Bepaal van de kritieke punten van f beperkt tot V de geaardheid met behulp van vermenigvuldigers en gerande Hessiaanse matrices.

Antwoord

De gerande Hessiaan voor de rand $g_2 = 0$, $\mu_1 = 0$ heeft de vorm

$$D^2L = \begin{pmatrix} 0 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 0 & \mu_2 \\ x_1 & \mu_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

De laatste $m - k = 2 - 1 = 1$ leidende hoofdminoren zijn van belang, dat wil zeggen, alleen

$$H_3 = \det D^2L = 2\mu_2 x_1 x_2 = 2\mu_2.$$

In de laatste stap hebben we gebruik gemaakt van het feit dat $x_1 x_2 = 1$ als $g_2(x) = 0$.

Samenvatting

x	$f(x)$	μ_1	μ_2	H_3	Conclusie
$(1, 1)$	-2	0	1	2	lokaal maximum
$(-1, -1)$	2	0	-1	-2	lokaal minimum
$(2, 1/2)$	$-5/2$	$-3/8$	$-1/4$		lokaal minimum
$(2/3, 3/2)$	$-13/6$	$-5/24$	$1/4$		geen extremum

- e Van alle kritieke punten van f beperkt tot V , bepaal met behulp van de enveloppestelling de afgeleide van de waarde van f als functie van a in het punt $a = 3$.

Antwoord

Volgens de enveloppestelling geldt in een kritiek punt $x(a)$ met vermenigvuldiger $\lambda(a)$ dat

$$\frac{d}{da} f(x(a)) = \frac{\partial L}{\partial a}(\lambda(a), x(a), a).$$

We hebben

$$L = -x_1 - x_2 - \mu_1(ax_1 + 4x_2 - 8) - \mu_2(1 - x_1x_2),$$

en daarom

$$\frac{\partial L}{\partial a} = -\mu_1 x_1.$$

x	μ_1	$\partial L/\partial a$	Conclusie
(1, 1)	0	0	kritieke waarde verandert niet
(-1, -1)	0	0	kritieke waarde verandert niet
(2, 1/2)	-3/8	3/4	kritieke waarde stijgt
(2/3, 3/2)	-5/24	5/36	kritieke waarde stijgt

4. (24 punten)

a Geef de definitie van het begrip ‘begrenste verzameling’.

Antwoord

Zie dictaat.

b Geef het bewijs van de volgende stelling: als $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ continu is en als $x_n \rightarrow v$ in \mathbb{R}^m , dan $f(x_n) \rightarrow f(v)$ in \mathbb{R}^k .

Antwoord

Zie dictaat.

c Laat zien dat de doorsnede van twee convexe verzamelingen convex is.

Antwoord

Zie dictaat.