Wiskunde AEO V
Hertentamen, dinsdag 20 januari 2004, 9^{30}–12^{30}
Tentamenzaal gebouw B

Dit tentamen bestaat uit vier opgaven. Wees precies. Vermeld welke stellingen je gebruikt, en verifieer van elke stelling die je gebruikt eerst de hypotheses. Een antwoord is **geheel fout** als er geen argumenten worden gegeven. Voorbeelden of tekeningen gelden **niet** als argumenten. 4 punten zijn gratis. Alle deelvragen (behalve vraag 1) brengen 6 punten op. Tentamens kunnen vanaf maandag 2 februari tot en met vrijdag 27 februari worden ingezien in kamer E5.09 (eventueel moet je een afspraak maken).

Opgave 1 *Een stelling (12 punten)*
Formuleer de impliciete functiestelling voor een vergelijking $G(x,y) = 0$, waarbij $G : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Opgave 2 *Extrema*
Laat de verzameling V gegeven zijn door

$$V = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}.$$

Laat verder de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door $f(x) = \langle x, Ax\rangle$, waarbij $\langle x,y\rangle$ het inproduct van twee vectoren $x,y \in \mathbb{R}^2$ is, en waarbij $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

a Laat zien dat de verzameling V compact is.

b Laat zien dat de functie f op V altijd een minimum m en een maximum M aanneemt. Laat verder zien dat als $m = M$ is, dat A dan de nulmatrix moet zijn.

Vanaf nu nemen we $a = 1$, $b = 2$ en $c = -2$ vast. We zoeken extrema van f beperkt tot V.

c Stel een Lagrange-functie op voor deze opgave, en verifieer of op de rand van V overal aan de rangconditie is voldaan.

d Vind alle kritieke punten van f beperkt tot V met de methode van Lagrange.

e Verifieer van alle kritieke punten die je hebt gevonden, of het lokale maxima of minima zijn. Wat zijn de globale extrema van f beperkt tot V?

f Bereken de eigenvectoren van A. Wat is het verband met de vorige opgave, en waarom?

Opgave 3 *Een vergelijking*
Laat $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door

$$f(x,y) = x_1^5 + x_2^5 - 2x_1x_2.$$

a Laat zien dat rond $x_2 = 1$ de variabele x_1 uit de impliciete vergelijking

$$f(x_1,x_2) = 0$$

kan worden opgelost als een functie $x_1 = \varphi(x_2)$.

b Geef zoveel mogelijk eigenschappen van de in **a** gevonden impliciete functie φ.

c Bereken de tweede afgeleide $\varphi''(1)$.

Opgave 4 *Convexiteit*
Beschouw de convexe verzamelingen $A \subset \mathbb{R}^n$ en $B \subset \mathbb{R}^n$.

a Geef de definitie van een convexe verzameling.

b Is de doorsnede $A \cap B$ van deze twee convexe verzamelingen convex? Zo ja, geef een bewijs, zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

c Is de vereniging $A \cup B$ van deze twee convexe verzamelingen convex? Zo ja, geef een bewijs, zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

d *(12 punten)* Een producent van een zeker goed gebruikt n verschillende produktiefactoren in het produktieproces. Zijn produktietechnologie wordt gekarakteriseerd door de concave produktiefunctie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$y = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

waarbij x_i de hoeveelheid weergeeft die de producent gebruikt van produktiefactor i, en waar $x = (x_1, \cdots, x_n)$. De prijs van produktiefactor i is w_i, $w = (w_1, \cdots, w_n)$ en de prijs van het geproduceerde goed is p.

De producent wil de winst $py - \langle w, x \rangle$ maximaliseren, gegeven de beperking $y = f(x)$. Het optimum wordt gegeven door de *factorvraagfuncties* $x_i^* = x_i(p, w) > 0$ en de *aanbodsfunctie* $y^* = y(p, w) > 0$. De maximale winst is

$$\pi(p, w) = \max_{x,y} \left\{ py - \langle w, x \rangle \;\middle|\; f(x) = y \right\}.$$

Bewijs dat er moet gelden

$$\frac{\partial \pi(p, w)}{\partial p} = y(p, w) \text{ en } \frac{\partial \pi(p, w)}{\partial w_i} = -x_i(p, w) \text{ voor alle } i.$$

Van welke wiskundige stelling maak je hier gebruik?