Wiskunde AEO V
Hertentamen, dinsdag 15 juni 2004, 9^{30}–12^{30}

Dit tentamen bestaat uit drie opgaven. Wees precies. Vermeld welke stellingen je gebruikt, en verifieer van elke stelling die je gebruikt eerst de hypotheses. Een antwoord is **geheel fout** als er geen argumenten worden gegeven. Voorbeelden of tekeningen gelden **niet** als argumenten. 4 punten zijn gratis. Alle deelvragen brengen 6 punten op, tenzij anders vermeld. Tentamens kunnen vanaf maandag 28 juni tot en met woensdag 7 juli worden ingezien in kamer E5.09 (eventueel moet je een afspraak maken).

Opgave 1 *Een stelling (12 punten)*
Formuleer de stelling van Lagrange over noodzakelijke voorwaarden voor extrema van differentieerbare functies onder gelijkheidrestricties.

Opgave 2 *Een vergelijking*
Laat $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door

$$f(x,a) = -\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2} + ax.$$

a Laat zien dat de functie $g_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gedefinieerd door $g_0(x) = f(x,0)$, haar maxima in de punten $x = \pm\sqrt{3}$ aanneemt.

b Laat zien dat er een differentieerbare functie $\varphi(a)$ is, zodanig dat $\varphi(0) = \sqrt{3}$ en zodat voor elke a in de buurt van 0 de functie $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gedefinieerd door $g_a(x) = f(x,a)$, een lokaal maximum aanneemt in $x = \varphi(a)$.

c Bereken de afgeleide $\varphi'(0)$.

d Bereken de tweede afgeleide $\varphi''(0)$.

e Bereken de afgeleide van de functie $h(a) = f(\varphi(a),a)$ met de kettingregel. Vereenvoudig je antwoord zover mogelijk.

Opgave 3 *Extrema*
Laat $\mathbb{R}^2_{++} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0,\ x_2 > 0\}$ zijn. Laat de functies $f,g : \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door

$$f(x) = 1 - x_1^{\frac{3}{2}} - 8x_2^{\frac{3}{2}}, \qquad g(x) = x_1x_2.$$

Laat de verzameling V gegeven zijn door

$$V = \{x \in \mathbb{R}^2_{++} \,|\, g(x) \geq 1\}.$$

a Schets de verzameling V.

b Geef de definitie van het begrip “gesloten verzameling”.

c Laat zien dat de verzameling V gesloten is. (Hint: gebruik de continuiteit van g). Is de verzameling V compact?

d Geef de definitie van het begrip “convexe verzameling”.

e Laat zien dat de functie g op $\mathbb{R}^2_{++}$ pseudoconcaaf is. Leid daaruit af dat de verzameling V convex is.

f Laat zien dat de functie f op $\mathbb{R}^2_{++}$ concaaf is. Leid daaruit af dat f beperkt tot V een maximum m aanneemt.

We gaan nu op zoek naar het maximum van f beperkt tot V.

g Stel een Lagrange-functie op voor deze opgave, en verifieer of op de rand van V overal aan de rangconditie is voldaan.

h Vind alle kritieke punten van f beperkt tot V met de methode van Lagrange.

i Verifieer van alle kritieke punten die je hebt gevonden, of het lokale maxima zijn. Neemt f beperkt tot V een globaal extremum aan?