Wiskunde AEO V
Tentamen, dinsdag 28 oktober 2003, 14^{00}–17^{00}
Tentamenzaal gebouw B

Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven. Wees precies. Vermeld welke stellingen je gebruikt, en verifieer van elke stelling die je gebruikt eerst de hypotheses. Een antwoord is **geheel fout** als er geen argumenten worden gegeven. Voorbeelden of tekeningen gelden **niet** als argumenten. 10 punten zijn gratis. Alle deelvragen (behalve vraag 1) brengen 5 punten op. Tentamens kunnen vanaf maandag 10 november tot en met vrijdag 28 november worden ingezien in kamer E5.09 (eventueel moet je een afspraak maken).

Opgave 1 *Een stelling (10 punten)*
Formuleer de stelling van Weierstraß. Geef definities van alle termen die in de stelling voorkomen.

Opgave 2 *Topologie (20 punten)*
Laat de verzameling V gegeven zijn door

$$V = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sin(x_1^2 - x_2^2) = 0\}.$$

Laat verder de functie $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door $Q(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2$, en laat $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door

$$f(x) = \mathrm{e}^{-Q(x)} \frac{\sin(x_1 + x_2)}{1 + x_1^2 + 2x_2^2}.$$

a Laat zien dat $Q(x)$ een kwadratische vorm is. Bepaal de definietheid van Q.

b Laat zien dat $\mathrm{e}^{-Q(x)} \leq 1$ voor alle $x \in \mathbb{R}^2$. Laat $R > 0$ een positief getal zijn. Laat zien dat als $\|x\| > R$, dat dan $|f(x)| \leq \frac{1}{1+R^2}$.

c Laat zien dat de verzameling V gesloten is.

d Bewijs dat er een punt $a \in V$ is, zodanig dat voor alle $x \in V$ geldt dat $f(x) \geq f(a)$.

Opgave 3 *Impliciete functiestelling (15 punten)*
Laat $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ een continu differentieerbare functie zijn, en laat de functie $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ gegeven zijn door

$$F(x,y) = y - f(x).$$

Laat verder $a, b \in \mathbb{R}^m$ zo gekozen zijn, dat $f(a) = b$.

a Gebruik de impliciete functiestelling, om een conditie af te leiden waaraan voldaan moet worden opdat rond $y = b$ de variabele x uit de impliciete vergelijking

$$F(x,y) = y - f(x) = 0$$

kan worden opgelost. Deze functie heet de inverse van f.

b Geef zoveel mogelijk eigenschappen van de in **a** gevonden inverse functie.

c Als $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeven is door

$$f(x) = (\mathrm{e}^{x_1} \cos x_2, \mathrm{e}^{x_1} \sin x_2)$$

en als $a = (1, \pi/2)$, wat is de afgeleide van de inverse functie in het punt $b = f(a) = (0, \mathrm{e})$?

Opgave 4 *Optimalisatie onder nevenvoorwaarden (25 punten)*
Laat de verzameling V gegeven zijn door

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -x_1^2 + x_2^2 \leq 0,\ -x_1 + x_2^2 - \frac{5}{2} \leq 0 \right\}.$$

Laat verder de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door $f(x) = x_1 + 2x_2$.

a Schets V in het (x_1, x_2)-vlak. Is V een convexe verzameling? Zo ja, geef een bewijs, zo nee een tegenargument.

b Is in alle randpunten van V aan de rangconditie voldaan?

c *(10 punten)* Bereken alle punten die aan de eerste orde condities voor een extremum voldoen.

d Bepaal van de punten gevonden in de vorige deelopgave of het (lokale) maxima of minima zijn.

Opgave 5 *Convexiteit en concaviteit (20 punten)*
a *(10 punten)* Laat zien dat de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeven door $f(x) = (x_1^\alpha + x_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, voor elke $\alpha \geq 1$ convex is.

Laat $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ een gegeven functie zijn.

b Geef de definitie van 'f is quasi-concaaf' en 'f is quasi-convex'.

c Als f wordt gegeven door

$$f(x) = \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{1+x_1^2+x_2^2}\right)^5},$$

is de functie f quasi-concaaf? Quasi-convex?