# Basis Actuariaat I

Tentamen 1 Juli 2009

Locatie: Tentamenzaal B
Duur: 9–12 u

Instructies:

- schrijf je antwoorden op het bijgeleverde tentamenpapier;
- vermeld op elke ingeleverde bladzijde je naam en studentnummer;
- op een elektronisch rekentoestel na mogen er geen hulpmiddelen gebruikt worden;
- schrijf eventuele opmerkingen voor de docent op je antwoordenblad;
- veel succes!

1. Een verzekeraar is overeengekomen om uitkeringen te betalen voor een persoon $(x)$ die arbeidsongeschikt geworden is.

   (i) De uitkeringen bedragen 150.000 euro per jaar, te betalen aan het begin van het jaar. De uitkeringen starten onmiddellijk en worden betaald zolang $(x)$ in leven is.

   (ii) Nadat de eerste schijf van 500.000 euro betaald is door de verzekeraar, zal de rest van de uitkeringen gebeuren door een herverzekeraar.

   (iii) Er geldt:

$$\begin{aligned} {}_tp_x &= (0.7)^t,\ 0 \leq t \leq 5.5 \\ &\quad 0, \qquad 5.5 < t. \end{aligned}$$

   (iv) $i = 0.05$.

   Bereken de actuarieel contante waarde op tijdstip $t = 0$ van de betalingen die de **herverzekeraar** zal doen.

Opl. Als de verzekerde zolang in leven is, betaalt de verzekeraar 150.000 op $t = 0$, op $t = 1$, op $t = 2$ en 50.000 op $t = 3$. De herverzekeraar betaalt vervolgens 100.000 op $t = 3$ en alle volgende betalingen. De gevraagde contante waarde wordt daarom gegeven door:

$$\begin{aligned} & 100.000 \times \left(\frac{0.7}{1.05}\right)^3 + 150.000 \times \left(\left(\frac{0.7}{1.05}\right)^4 + \left(\frac{0.7}{1.05}\right)^5\right) \\ = \; & 79.012. \end{aligned}$$

2. Voor een levenslange prenumerando lijfrente op $(x)$, met jaarlijkse uitkeringen geldt:

   (i) $q_x = 0.01$;

(ii) $q_{x+1} = 0.05$;

(iii) $i = 0.05$;

(iv) $\ddot{a}_{x+1} = 6.951$.

Bereken de verandering in de actuarieel contante waarde van deze prenumerando lijfrente als $p_{x+1}$ met 0.03 toeneemt.

Opl. Voor de contante waarde van deze lijfrente weten we:

$$\ddot{a}_x = 1 + vp_x + v^2 p_x p_{x+1} \ddot{a}_{x+2}.$$

Zeg $y$ is de verandering in $p_{x+1}$ en $\ddot{a}_x^\star$ de nieuwe contante waarde. Er geldt dan:

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x^\star &= 1 + vp_x + v^2 p_x (p_{x+1} + y) \ddot{a}_{x+2} \\ &= \ddot{a}_x + yv^2 p_x \ddot{a}_{x+2}.\end{aligned}$$

De verandering in contante waarde wordt dus gegeven door: $yv^2 p_x \ddot{a}_{x+2}$. Gegeven is:

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{x+1} &= 6.951 = 1 + vp_{x+1}\ddot{a}_{x+2} \\ &= 1 + \frac{1}{1.05}(1 - 0.05)\ddot{a}_{x+2} \\ &\Downarrow \\ \ddot{a}_{x+2} &= 6.577.\end{aligned}$$

De gevraagde verandering wordt dan:

$$0.03 \times \left(\frac{1}{1.05}\right)^2 \times 0.99 \times 6.577 = 0.177.$$

3. Eddy Borremans, 40 jaar oud, wint 10.000 euro in de Actuariële Loterij. In plaats van het bedrag in 1 keer te ontvangen, krijgt de winnaar de mogelijkheid aangeboden om over te schakelen op een actuarieel equivalente uitbetalingswijze. Hierbij ontvangt hij jaarlijks een bedrag $K$ (aan het begin van elk jaar). Deze betaling is de eerste 10 jaar gegarandeerd en gaat vervolgens door zolang Eddy in leven is. Gegeven is:

   (i) $i = 0.04$;

   (ii) $A_{40} = 0.3$;

   (iii) $A_{50} = 0.35$;

   (iv) $A_{\substack{1 \\ 40:\overline{10|}}} = 0.09$.

   Bereken $K$.

   Opl. Eddy ontvangt jaarlijks $K$ en deze betaling is gegarandeerd gedurende 10 jaar. De contante waarde hiervan is gegeven door:

$$K\ddot{a}_{\overline{10|}} = 8.4353K.$$

   De betalingen die niet gegarandeerd zijn, hebben als contante waarde:

$${}_{10|}\ddot{a}_{40} \times K.$$

We dienen dus de volgende vergelijking op te lossen naar $K$:

$$10000 = (8.4353 + {}_{10}E_{40}\ddot{a}_{50})K.$$

We vinden ${}_{10}E_{40}$ uit:

$$\begin{aligned} A_{40} &= A^{\ 1}_{40:\overline{10}|} + {}_{10}E_{40}A_{50} \\ &\Downarrow \\ {}_{10}E_{40} &= 0.6. \end{aligned}$$

Bereken $\ddot{a}_{50}$ uit:

$$\ddot{a}_{50} = \frac{1 - A_{50}}{d} = 16.9.$$

Invullen geeft dan:

$$\begin{aligned} 10000 &= (8.4353 + 0.6 \times 16.9)\,K \\ &= 18.5753K \\ &\Downarrow \\ K &= 538.35. \end{aligned}$$

4. Een dalende tijdelijke kapitaalverzekering bij overlijden op $(80)$ betaalt $(20-k)$ aan het eind van het jaar van overlijden als $(80)$ overlijdt in jaar $k+1$ (met $k = 0, 1, 2, \ldots, 19$). Gegeven is:

   (i) $i = 0.06$;

   (ii) Voor een zekere sterftetafel met $q_{80} = 0.2$ is de eenmalige contante waarde van dit contract gelijk aan 13.

   (iii) Voor diezelfde sterftetafel, maar nu met $q_{80} = 0.1$, is de eenmalige premie voor dit contract gegeven door $P$.

   Bereken $P$.

Opl. Voor de eenmalige premie van een dergelijke verzekering geldt:

$$(DA)^{\ 1}_{80:\overline{20}|} = 20vq_{80} + vp_{80}\left((DA)^{\ 1}_{81:\overline{19}|}\right).$$

Gebruiken we de sterftetafel met $q_{80} = 0.2$ dan geldt:

$$\begin{aligned} 13 &= \frac{20(0.2)}{1.06} + \frac{0.8}{1.06}(DA)^{\ 1}_{81:\overline{19}|} \\ &\Downarrow \\ (DA)^{\ 1}_{81:\overline{19}|} &= \frac{13(1.06) - 4}{0.8} = 12.225. \end{aligned}$$

Voor de gevraagde premie $P$ vinden we dan:

$$\begin{aligned} (DA)^{\ 1}_{80:\overline{20}|} &= 20 \times v \times 0.1 + v \times 0.9 \times 12.225 \\ &= 12.267. \end{aligned}$$

5. Een gemengde verzekering ('endowment insurance') met duur 3 jaar op $(60)$ zorgt voor uitkeringen die betaald worden aan het eind van het jaar van overlijden: 500 als overlijden zich voordoet in het eerste jaar (dwz tussen $t = 0$ en $t = 1$), 800 bij overlijden in het tweede jaar en 1000 bij overlijden in het derde jaar. Bijkomend is er een uitkering bij leven ('pure endowment') van 1000 die betaalbaar is op leeftijd 63, als $(60)$ dan nog in leven is. Deze gemengde verzekering wordt aangekocht met drie jaarlijkse premies, te beginnen op leeftijd 60. De tweede premie is het dubbele van de initiële premie en de derde premie is drie keer de initiële premie. Gegeven is: $q_{60} = 0.1$, $q_{61} = 0.2$ en $q_{62} = 0.25$. De rente bedraagt 25% gedurende de eerste twee jaar en 20% nadien. Vind de initiële premie.

Opl. Contante waarde van de uitkeringen bij overlijden:

$$500 q_{60} v(1) + 800 p_{60} q_{61} v(2) + 1000 p_{60} p_{61} q_{62} v(3) \quad = \quad 228.16.$$

Contante waarde van de uitkering bij leven:

$$1000 p_{60} p_{61} p_{62} v(3) \quad = \quad 288.$$

Contante waarde van de premies:

$$P + 2Pv(1) p_{60} + 3Pv(2) p_{60} p_{61} \quad = \quad 3.822.$$

Gelijkstellen van premies en uitkeringen geeft: $P = 135.04$.

6. Een uitgestelde lijfrente op $(40)$ zorgt voor een jaarlijks inkomen van 1000 te beginnen op leeftijd $(60)$. Als $(40)$ de leeftijd van 60 bereikt, zijn de eerste 10 betalingen vanaf dat moment gegarandeerd, ongeacht of $(40)$ in leven is. Jaarlijkse, constante premies $P$ zijn betaalbaar gedurende 10 jaar, te beginnen vanaf leeftijd 40. Als $(40)$ sterft vooraleer de lijfrente in werking treedt, worden alle premies betaald vóór overlijden, terugbetaald aan het eind van het jaar van overlijden. Vind een uitdrukking voor $P$ onder volgende aannames: $(a)$ premies worden terugbetaald zonder interest; $(b)$ premies worden terugbetaald met interest.

Opl. (a) Contante waarde van de uitkeringen van de lijfrente:

$$1000 \, {}_{20}p_{40} \ddot{a}(0_{20}, 1_{10}) + 1000 \ddot{a}_{40}(0_{30}, 1_{\infty}).$$

De eerste term volgt uit het feit dat – als de verzekerde overleeft tot leeftijd 60 – de eerste 10 betalingen van de lijfrente dan gegarandeerd zijn. De tweede term volgt uit het niet gegarandeerde gedeelte van de lijfrente. De contante waarde van de premies is gegeven door:

$$P \ddot{a}_{40}(1_{10}).$$

Terugbetaling van de premies zonder interest zorgt voor een uitkering bij overlijden van:

$$(P, 2P, 3P, \ldots, 10P, \ldots, 10P)$$

Gelijkstellen van premies en uitkeringen geeft dan:

$$P = \frac{1000\left\{{}_{20}p_{40}\,\ddot{a}(0_{20},1_{10}) + \ddot{a}_{40}(0_{30},1_{\infty})\right\}}{\ddot{a}_{40}(1_{10}) - A_{40}(j)},$$

waarbij $j = (1,2,3,\ldots,10_{11})$.

(b) Elke overlevende zal op leeftijd 60 een bedrag $Pv(20,0)\ddot{a}(1_{10},v)$ verworven hebben. Dit moet volstaan voor de uitkeringen beloofd in het contract. Dus:

$$Pv(20,0)\ddot{a}(1_{10};v) = 1000\left\{\ddot{a}(1_{10};v) + \ddot{a}_{60}(0_{10};1_{\infty})\right\}.$$

In conclusie:

$$P = \frac{1000\left[\ddot{a}(1_{10};v) + \ddot{a}_{60}(0_{10},1_{\infty})\right]}{v(20,0)\ddot{a}(1_{10};v)}.$$