Tentamen Basis Actuariaat 1 5 april 2007

Noteer op al je in te leveren papieren naam en collegekaart nummer!

Studenten die de Excel toets gedaan hebben hoeven opgave 1 niet te maken, mogen dit echter wel. Het hoogste cijfer telt!

Gelieve de vragen 1 tot en met 3 op een ander blad te maken dan 4 en 5.

Opgave 1 (20 pnt)

a. Bewijs uitgaande van de definities, in termen van sommaties, de volgende gelijkheid:

$$(Ia)_{\overline{n}|} = X *_{m|} (I\ddot{a})_{\overline{n}|}$$

en druk X uit in de onbekenden *n, m en i.*

b. Zet de volgende symbolen in volgorde van opklimmende waarde

$$a_{\overline{n}|},\ \ddot{a}_{\overline{n}|},\ \bar{a}_{\overline{n}|},\ a_{\overline{n}|}^{(2)},\ \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(4)},\ \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(2)}.$$

Opgave 2 (10 pnt)

Het spaarsaldo aan het begin van de termijn is gelijk aan C_{t_k} resp. aan het einde van de termijn C_{t_k+1}. Het spaarsaldo groeit alleen aan door intrest, waarbij de intrest wordt bepaald door de intrestintensiteit $\partial(t)$.
Zij nu gegeven dat de tijdseenheid een jaar is en dat de intrestintensiteit over deze tijdseenheid weergegeven kan worden als een lineaire functie in *t*:

$$\partial(t) = a \cdot t.$$

Hoe groot moet *a* dan zijn, om het spaarsaldo in een jaar tijd door intrestaangroei te laten verdubbelen?

Opgave 3 (25 punten)

Mevrouw Y en meneer X gaan beiden bij de bank een schuld aan, groot €175.000,-. De bank verstrekt de lening voor een looptijd van 20 jaar en tegen een vast intrestpercentage van 6%.
Voor dit geleende bedrag betaalt mevrouw Y jaarlijks aan de bank, postnumerando, een gelijkblijvende annuïteit. Deze annuïteit bestaat deels uit aflossing van haar schuld en deels uit de verschuldigde intrest over de nog uitstaande schuld van dat jaar.

a. Leid voor de annuïtaire lening van mevrouw Y een onafhankelijke uitdrukking af voor: de jaarlijkse restschuld S_k, de jaarlijkse betaling b_k en de jaarlijkse aflossing a_k. Gebruik hierbij koopsomsymbolen.

b. Bereken de jaarlijkse b_k.

Meneer X betaalt voor zijn lening aan de bank jaarlijks, postnumerando, een betaling b_k = 2.000 * (k - 1). Ook zijn betaling bestaat voor een deel uit intrestbetaling en voor het overige deel uit aflossing. Om de lening geheel af te lossen, moet meneer X aan het einde van de looptijd, gelijk met de betaling b_{20} nog een extra aflossing doen (= b_{rest}).

c. Bepaal de hoogte van deze b_{rest}.

Er is inmiddels 10 jaar verstreken en er zijn nog 10 jaarbetalingen te gaan. De marktrente is gedaald naar 4,2%.

d. Bereken de koers K_{10} voor de lening van mevrouw Y.
   Is de bank blij met deze lening?
e. Druk de koers K_{10} van de lening van meneer X uit in koopsom-symbolen. Zal deze koers hoger of lager dan 1 zijn?

Opgave 4 (20 punten)

Veronderstel de stochastische resterende levensduur $T(x)$ waarbij de kansverdeling van $T(x)$ bepaald wordt door de sterfte-intensiteit

$$\mu(x) = 0{,}0002 * x + a$$

a. Leid de overlevingskans ${}_tp_x$ af.

b. Als gegeven is dat a = 0,0008, bereken dan voor een 30-jarige man de 1-jarige overlevingskans. Bereken ook de 1-jarige overlijdenskans.

Opgave 5 (25 punten)

Een verkorte notatie voor kernelfuncties gaat uit van een operator [*v*] die als volgt is gedefinieerd

$$[v]\hat{q}_x = \tfrac{1}{v}\left(\hat{q}_{x-(v-1)/2} + \hat{q}_{x-(vv-3)/2} + \ldots + \hat{q}_{x+(v-3)/2} + \hat{q}_{x+(v-1)/2}\right), \text{ voor } x = (v - 1)/2$$

Stel dat we de volgende kernelfunctie hebben (uitgedrukt met behulp van de hierboven gedefinieerd operator)

$$\tfrac{1}{21}[1] + \tfrac{3}{7}[3] + \tfrac{25}{21}[5] - \tfrac{2}{3}[7].$$

a. Wat zijn de gewichten die bij deze kernelfunctie horen?

b. Waaraan voldoen kernelfuncties die 'optimaal' zijn (zoals in de syllabus behandeld)?

c. Bewijs dat de hierboven gedefinieerde kernelfunctie optimaal is.

Veronderstel dat de sterftekansen een exponentiële functie volgen van de volgende vorm

$$q_x = \exp\left(ax^2 + bx + c\right)$$

waarbij *a*, *b* en *c* constanten zijn.

d. Beschrijf een procedure om de geschatte sterftekansen met deze kernelfunctie glad te strijken.

Gegeven de volgende relatie tussen de gewichten v_k van de operator [*v*] en de gewichten a_k van de kernelfunctie

$$v_k = (2k - 1)\Delta a_{-k}\text{ , voor } k = 1, 2, \ldots, n \text{ en met } \Delta\hat{q}_x = \hat{q}_{x+1} - \hat{q}_x .$$

e. Bewijs deze relatie voor *n* = 3.