Basis Actuariaat I

Tentamen 19 Januari 2009

Locatie: A 3.06
Duur: 14-17u

Instructies:

- schrijf je antwoorden op het bijgeleverde tentamenpapier;
- vermeld op elke ingeleverde bladzijde je naam en studentnummer;
- op een elektronisch rekentoestel na mogen er geen hulpmiddelen gebruikt worden;
- schrijf eventuele opmerkingen voor de docent op je antwoordenblad;
- veel succes!

1. [10 punten] Een schuldenaar moet een bank over vier jaar 6,280 euro, over zeven jaar 8,460 euro en over dertien jaar 7,350 euro terugbetalen. Om aan zijn verplichtingen te voldoen stelt de schuldenaar aan de bank de volgende alternatieven voor

   (a) alle schulden worden voldaan door middel van een enkele betaling over vijf jaar;

   (b) alle schulden worden voldaan door betaling van het totale bedrag van de schuld (i.e. 22,090 euro) in één keer op een geschikt toekomstig tijdstip.

   Bereken nu op basis van een constante interest van 8%, bij een tijdseenheid van een jaar, het eenmalige bedrag van alternatief (a), en het juiste tijdstip van alternatief (b). (Neem als uitgangspunt dat de contante waarde van de betalingen onder de alternatieven (a) en (b), gelijk is aan de contante waarde van de betalingen behorend bij de oorspronkelijke verrichtingen.)

Opl. (a) 22,090 is het totale bedrag dat betaald dient te worden. Onder alternatief (a) krijgen we $6,280v(4) + 8,460v(7) + 7,350v(13) = K(1.08)^{-5}$. Dus, $K = 18,006.46$.
(b) Onder alternatief (b) vinden we $12,254.9 = 22,090(1+0.08)^{-n}$. Dan is, $\log\left(\frac{12,254.9}{22,090}\right) = (-n)\log(1.08)$ en $n = 7.656$.

2. (a) [2 punten] Gebruik onderstaande 1–jarige sterftekansen om een sterftetafel te construeren met waarden voor ℓ_x zó dat $\ell_{45} = 100,000$ (lees als: 'honderdduizend'). Vermeld in je sterftetafel de waarden voor ℓ_x met $x = 40, \ldots, 50$.

leeftijd x	40	41	42	43	44
q_x	0.00172	0.00186	0.00201	0.00219	0.00240
leeftijd x	45	46	47	48	49
q_x	0.00266	0.00297	0.00332	0.00371	0.00415

(b) [8 punten] Gebruik de in (a) geconstrueerde sterftetafel om onderstaande kansen te berekenen. Omschrijf in je eigen woorden de betekenis van de symbolen gebruikt in (i)-(iv).

(i) ${}_4q_{42}$;

(ii) ${}_5p_{43}$;

(iii) ${}_{2|}q_{45}$;

(iv) ${}_{2|2}q_{45}$.

Opl. We berekenen telkens $p_x = 1 - q_x$ en gebruiken volgende relaties om de sterftetafel te construeren: $\ell_{x+1} = \ell_x p_x$ om, vertrekkend met ℓ_{45}, ℓ_x met $x > 45$ te berekenen, en $\ell_x = \frac{\ell_{x+1}}{p_x}$ om, vertrekkend met ℓ_{45}, ℓ_x met $x < 45$ te berekenen. Dit resulteert in volgende tabel:

x	q_x	p_x	ℓ_x
40	0.00172	0.99828	101,024
41	0.00186	0.99814	100,851
42	0.00201	0.99799	100,663
43	0.00219	0.99781	100,461
44	0.00240	0.99760	100,241
45	0.00266	0.99734	100,000
46	0.00297	0.99703	99,734
47	0.00332	0.99668	99,438
48	0.00371	0.99629	99,108
49	0.00415	0.99585	98,740
50			98,330

Voor de gevraagde kansen vinden we dan:

(i) ${}_4q_{42} = 1 -_4 p_{42} = 1 - \frac{\ell_{42+4}}{\ell_{42}} = \frac{\ell_{46}}{\ell_{42}} = 0.00923$;

(ii) ${}_5p_{43} = \frac{\ell_{43+5}}{\ell_{43}} = 0.9865$;

(iii) ${}_{2|}q_{45} = \frac{\ell_{47}-\ell_{48}}{\ell_{45}} = 0.0033$;

(iv) ${}_{2|2}q_{45} = \frac{\ell_{47}-\ell_{49}}{\ell_{45}} = 0.00698$.

3. [10 punten] Gegeven is:

(i) de eenmalige premie voor een n-jarige gemengde verzekering voor een bedrag groot 1,000 op (x) bedraagt 700. Hierbij wordt de betaalde premie teruggestort aan het eind van het jaar van overlijden als dat zich voordoet in de periode met duur n;

(ii) de eenmalige premie voor dezelfde gemengde verzekering maar zonder terugbetaling van de premie aan het eind van het jaar van overlijden is 650.

Bereken nu de eenmalige premie voor dezelfde gemengde verzekering groot 1,000, onderschreven op dezelfde persoon en voor dezelfde periode, maar nu indien slechts de helft van de betaalde premie wordt teruggestort aan het eind van het jaar van overlijden als dit plaatsvindt in dezelfde periode (dus opnieuw met duur n).

Opl. Voor deze gemengde verzekering is gegeven:

$$\begin{aligned} 700 &= 700A_{\stackrel{1}{x:\overline{n}|}} + 1000{}_nE_x \\ &\text{en} \\ 650 &= 1000{}_nE_x. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $A_{\stackrel{1}{x:\overline{n}|}} = \frac{700-650}{700} = \frac{1}{14}$.

We zoeken de eenmalige premie P zodat

$$P = \frac{1}{2}PA_{\stackrel{1}{x:\overline{n}|}} + 1000{}_nE_x.$$

Dan is $P = \frac{1000{}_nE_x}{1-\frac{1}{2}A_{\stackrel{1}{x:\overline{n}|}}} = \frac{650}{1-\frac{1}{2}\frac{1}{14}} = 674.07$.

4. [10 punten] Voor een bepaalde overlijdensverzekering op (30) zijn de uitkeringen als volgt:

leeftijd	uitkering
30-35	2,000
35-40	1,000
40-45	500
$>$45	100

Table 1: *Gegevens bij vraag 4.*

Onderstel dat deze uitbetaald worden aan het eind van het jaar van overlijden. Verdere assumpties:

- sterfte volgt de bijgeleverde tabel;
- $i = 0.06$.

Bereken de numerieke contante waarde van deze polis.

Opl. Noteren we de contante waarde van deze polis met APV ('actuarial present value'). Er geldt dan

$$\begin{aligned} \text{APV} &= 2000A_{\stackrel{1}{30:\overline{5}|}} \\ &+ 1000{}_5E_{30}A_{\stackrel{1}{35:\overline{5}|}} \\ &+ 500{}_{10}E_{30}A_{\stackrel{1}{40:\overline{5}|}} \\ &+ 100{}_{10}E_{30}\,{}_5E_{40}A_{45}. \end{aligned}$$

Hierbij hebben we:

$$\begin{aligned}
A_{\stackrel{1}{30:\overline{5}|}} &= A_{30} - {}_5E_{30}A_{35} \\
&= \frac{102.48}{1000} - \frac{740.91}{1000}\frac{128.72}{1000} \\
&= 0.00711; \\
A_{\stackrel{1}{35:\overline{5}|}} &= A_{35} - {}_5E_{35}A_{40} \\
&= \frac{128.72}{1000} - \frac{738.73}{1000}\frac{161.32}{1000} \\
&= 0.009548; \\
A_{\stackrel{1}{40:\overline{5}|}} &= A_{40} - {}_5E_{40}A_{45} \\
&= \frac{161.32}{1000} - \frac{735.29}{1000}\frac{201.2}{1000} \\
&= 0.01338.
\end{aligned}$$

De actuarieel contante waarde van deze verzekering wordt dan:

$$\begin{aligned}
\text{APV} &= 2000(.00711) + 1000(.74091)(.009548) + 500(.54733)(.01338) \\
&+ 100(.54733)(.73529)(.2012) \\
&= 33.05.
\end{aligned}$$

5. [10 punten] Voor een speciale, volledig discrete tijdelijke kapitaalverzekering bij overlijden op (30) met looptijd 20 jaar geldt het volgende:

   (i) de uitkering bij overlijden is 1000 gedurende de eerste 10 jaar en 2000 gedurende de volgende 10 jaar;

   (ii) De premie, bepaald volgens actuariële equivalentie, is π voor de eerste 10 jaar en 2π voor de volgende 10 jaar;

   (iii) $\ddot{a}_{30:\overline{20}|} = 15.0364$;

   (iv) rente is constant;

   (v) Tabel 1 is gegeven:

x	$\ddot{a}_{x:\overline{10}\vert}$	$1000A^{1}_{x:\overline{10}\vert}$
30	8.7201	16.66
40	8.6602	32.61

Table 2: *Gegevens bij vraag 5.*

   Bepaal nu π. **Hint**: herinner U de volgende uitdrukkingen $\ddot{a}_x(\mathbf{c}) = \ddot{a}_x({}_k\mathbf{c}) + y_x(k)\ddot{a}_{x+k}(\mathbf{c} \circ k)$ en $A_x(\mathbf{c}) = A_x({}_k\mathbf{c}) + y_x(k)A_{x+k}(\mathbf{c} \circ k)$.

Opl. De actuarieel contante waarde van de premies is gegeven door:

$$\begin{aligned} & \pi \sum_{k=0}^{9} v^k \ {}_k p_{30} + 2\pi \sum_{k=10}^{19} v^k \ {}_k p_{30} \\ = \ & \pi \times \ddot{a}_{30:\overline{10}|} + 2\pi \times_{10|10} \ddot{a}_{30} \\ = \ & \pi \times \ddot{a}_{30:\overline{10}|} + 2\pi \times y_{30}(10) \times \ddot{a}_{30+10}(1_{10}). \end{aligned}$$

De actuarieel contante waarde van de uitkeringen is gegeven door:

$$\begin{aligned} & 1000 \sum_{k=0}^{9} v^{k+1} \ {}_k p_{30} q_{30+k} + 2000 \sum_{k=10}^{19} v^{k+1} \ {}_k p_{30} q_{30+k} \\ = \ & 1000 \times A^1_{30:\overline{10}|} + 2000 y_{30}(10) A^1_{40:\overline{10}|}. \end{aligned}$$

Gebruiken we nu het gegeven, dan vinden we

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{30:\overline{20}|} &= \ddot{a}_{30:\overline{10}|} +_{10} E_{30} \ddot{a}_{40:\overline{10}|} \\ &\Downarrow \\ 15.0364 &= 8.7201 +_{10} E_{30} \times 8.6602, \end{aligned}$$

dan is ${}_{10}E_{30} = 0.72935$. De actuarieel contante waarde van de premies wordt dan

$$\pi \times 8.7201 + 2\pi \times 0.72935 \times 8.6602 \quad = \quad 21.3527\pi.$$

De actuarieel contante waarde van de uitkeringen wordt dan:

$$16.66 + 2 \times 0.72935 \times 32.61 \quad = \quad 64.23.$$

Hieruit volgt: $\pi = 3.01$.

EINDE VAN HET TENTAMEN