UITWERKING Tentamen BA1 28-01-2007

Opgave 1

$$\left(Ia\right)_{\overline{n+m}|} = \sum_{k=1}^{n+m} v^k * k = \sum_{k=1}^{m} v^k * k + \sum_{k=m+1}^{n+m} v^k * k = \sum_{k=0}^{m-1} v^{k+1} * (k+1) + \sum_{k=m+1}^{n+m} v^k * k$$

$$\sum_{k=m+1}^{n+m} v^k * k = \sum_{k=1}^{n} v^{m+k} * (m+k) = v^m * \sum_{k=1}^{n} v^k * k + v^m * m \sum_{k=1}^{n} v^k$$

$$\left(I\ddot{a}\right)_{\overline{m}|} = \sum_{k=0}^{m-1} v^k * (k+1)$$

$$\left(Ia\right)_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} v^k * k$$

$$a_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} v^k$$

er kan nu worden geschreven:

$$\left(Ia\right)_{\overline{n+m}|} = v * \left(I\ddot{a}\right)_{\overline{m}|} + v^m * \left(Ia\right)_{\overline{n}|} + v^m * m * a_{\overline{n}|}$$

Dus:

$$X_1 = v$$

$$X_2 = A_{\overline{m}|} = v^m$$

$$X_3 = m * A_{\overline{m}|} = m * v^m$$

Opgave 2

$\delta(t) = at^2 + bt + c$

De effectieve intrest over het jaar bedraagt 11% (= (spaarsaldo eind -/- spaarsaldo begin) / spaarsaldo begin). Er volgt de volgende vergelijking:

$$1{,}11 = 1 + i(0,1) = e^{\int_0^1 \partial(t)dt} = e^{\int_0^1 \left(at^2+bt+c\right)dt} = e^{a\frac{1}{3}t^3 + b\frac{1}{2}t^2 + ct + c|_0^1} = e^{a\frac{1}{3} + b\frac{1}{2} + c}$$

verder geldt dat $\delta(0) = 0{,}125$ en $\delta(1/2) = 0{,}105$; gevraagd is $\delta(1)$.

$\delta(0) = c = 0{,}125$

$\delta(1/2) = 0{,}105 = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c \Rightarrow 0{,}105 = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + 0{,}125 \Rightarrow -0{,}020 = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b$

$$1{,}11 = e^{a\frac{1}{3} + b\frac{1}{2} + c} = e^{a\frac{1}{3} + b\frac{1}{2} + 0{,}125} \Rightarrow \ln(1{,}11) = \ln\left(e^{a\frac{1}{3} + b\frac{1}{2} + 0{,}085}\right) = \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + 0{,}125 \Rightarrow$$

$$\ln(1{,}11) = 0{,}104 = \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + 0{,}125 \Rightarrow \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b = -0{,}0206$$

we hebben nu drie vergelijking met 3 onbekenden:

c = 0,125

$$\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b = -0,020$$

$$\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b = -0,0206$$

Hieruit volgt: a = -0,0072, b = -0,0364 en c = 0,125.
De functie $\delta(t)$ is aldus: $\delta(t)$ = -0,0072 t^2 - 0,0364 t + 0,125
En $\delta(1)$ = a + b + c = 0,0814.

Opgave 3a
Gelijkmatig aflosbaar:

$$b_k = a_k + i * S_{k-1}$$

$$a_k = \frac{1}{n} * L \left\{ = \frac{1}{10} * 100.000 = 10.000 \right\} \text{waarbij } L = S_0 = 100.000$$

$$i * S_{k-1} = i * \left(\frac{n-k+1}{n} \right) * L \left\{ = i * \left(\frac{10-k+1}{10} \right) * 100.000 = 7.000 * \left(\frac{10-k+1}{10} \right) \right\}$$

Annuïtair:

$$b_k = b = \frac{L}{a_{\overline{n}|}} = \left\{ \frac{100.000}{a_{\overline{10}|}} = 14.237,75 \right\} \text{ waarbij } L = S_0 = 100.000$$

$$a_k = b * A_{\overline{n-k}|} = b * A_{\overline{10-k}|}$$

$$i * S_{k-1} = i * b * a_{\overline{n-k}|} \left\{ = 7\% * b * a_{\overline{10-k}|} \right\}$$

Opgave 3b
Gelijkmatig aflosbaar:

$$R_0 = \frac{1}{n} * L * a_{\overline{n}|r} + i * \frac{1}{n} * L * (Da)_{\overline{n}|r} \left\{ = 10.000 * a_{\overline{10}|r} + 700 * (Da)_{\overline{10}|r} \right\}$$

Annuïtair:

$$R_0 = b * a_{\overline{n}|r}$$

Opgave 3c (gelijkmatig aflosbaar) (marktrente r=6%)

$$R_0 = 10.000 * a_{\overline{10}|r} + 700 * (Da)_{\overline{10}|r} = 10.000 * 7,3601 + 700 * (Da)_{\overline{10}|r} = 104.399,83$$

waarbij $(Da)_{\overline{10}|r} = \frac{n - a_{\overline{n}|r}}{r} = \frac{10 - 7,3601}{0,06} = 43,9983$

$$K_0 = \frac{R_0}{L} = \frac{104.399,83}{100.000} = 1,0440$$

Opgave 3c (annuïtair) (marktrente r=6%)

$$R_0 = b * a_{\overline{n}|r} = b * a_{\overline{10}|0,06} = 14.237,75 * 7,3601 = 104.791,08$$

$$K_0 = \frac{R_0}{L} = \frac{104.791,08}{100.000} = 1,0479$$

Resumé:

Gelijkmatig aflosbaar:	Annuïtair:
$R_0 = 1,0440$	$R_0 = 1,0479$
$R_0 = 1$	$R_0 = 1$
$R_0 = 0,9589$	$R_0 = 0,9554$

De leningnemer kiest aldus voor de gelijkmatig aflosbare lening bij marktrente 6% en voor de annuïtair aflosbare lening bij de marktrente van 8%. Bij een marktrente van 7% zijn beide koersen gelijk.

Opgave 4

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\ {}_{k|}q_x \text{ en } A_x = A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} A_{x+n} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_{k|}q_x + v^n\ {}_n p_x A_{x+n}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_{k|}q_x + v^n\ {}_n p_x A_{x+n} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_{k|}q_x + v^n\ {}_n p_x \sum_{k=n}^{\infty} v^{k-n+1}\ {}_{k-n|}q_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_{k|}q_x + \sum_{k=n}^{\infty} v^{k+1}\ {}_{k|}q_x \Rightarrow$$

$$\text{dus } \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_{k|}q_x + \sum_{k=n}^{\infty} v^{k+1}\ {}_{k|}q_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\ {}_{k|}q_x = A_x$$

$$A_x = A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} \cdot A_{x+n} \Rightarrow A_{35} = A^{1}_{35:\overline{5}|} + A_{35:\overline{5}|}^{\ \ 1} \cdot A_{40} \Rightarrow A_{35} = 0,00750 + A_{35:\overline{5}|}^{\ \ 1} \cdot 0,2500$$

Tevens geldt:

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = A_{x:\overline{n}|} \Rightarrow A^{1}_{35:\overline{5}|} + A_{35:\overline{5}|}^{\ \ 1} = A_{35:\overline{5}|} \Rightarrow 0,0075 + A_{35:\overline{5}|}^{\ \ 1} = 0,8000 \Rightarrow A_{35:\overline{5}|}^{\ \ 1} = 0,7925$$

Oplossen levert: $A_{35:\overline{5}|}^{\ \ 1} = 0,7925 \Rightarrow A_{35} = \left(0,0075 + A_{35:\overline{5}|}^{\ \ 1} \cdot 0,2500\right) * 100.000 \Rightarrow$

$$A_{35} = (0,0075 + 0,7925 \cdot 0,2500) * 100.000 = 20.562,50$$

Opgave 5a

$$\text{CW}(\text{premies}) = \text{P} * \ddot{a}^{(2)}_{\overline{30}|4\%} \{= \text{P}*17,8091\}$$

$$\ddot{a}^{(2)}_{\overline{30}|4\%} = \frac{1 - An\,|\,i(p)}{d^{(p)}} = \frac{1 - 0{,}308318668}{0{,}038838649} = 17{,}8091$$

$$An\,|\,i(p) = v \wedge n$$

$$v = \frac{1}{1 + i(p)}$$

$$d = \frac{i(p)}{1 + i(p)}$$

$$d^{(p)} = p * (1 - v \wedge (1/p))$$

Opgave 5b.

$$\text{CWverz} = 20.000 * v^{30}\bar{\text{A}}_{\text{x}} = 20.000 * \text{v}^{30} \int_0^{\omega - x} \text{v}^{\text{t}} \frac{1}{\omega - x} \text{dt}$$

$$\text{Hier } 20.000 * \frac{\text{v}^{30}}{60} \int_0^{60} \text{v}^{\text{t}}\text{dt} = 20.000 * \frac{\text{v}^{30}}{60} \bar{\text{a}}_{\overline{60}|4\%} = 2371{,}28$$

Opgave 5c.

$\text{P}*17{,}8090 = 2371{,}28 \Rightarrow \text{P} = 133{,}15$