Tentamen lineaire algebra IV, 28 oktober 2008

1. Beschouw de deelruimte $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^3$ en $\mathcal{V} = \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \; \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \\ -25 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal met behulp van de Gram-Schmidt methode een orthonormale basis voor deelruimte $\mathcal{V}$.

(b) Bepaal de QR factorisatie van de matrix $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

(c) Bepaal een basis voor $\mathcal{V}^\perp$, het orthogonaal complement van $\mathcal{V}$. |0| .

2. Beschouw de volgende kwadratische vormen

$$K_c(x, y) = c(x^2 + y^2) + 3x^2 + 2xy, \; c \in \mathbb{R}$$

(a) Bepaal de symmetrische matrix B_c zodanig dat $K_c(\vec{v}) = \vec{v}^\top B_c \vec{v}$, waarbij $\vec{v} = (x, y)^\top$.

(b) Voor welke waarden van c is K_c respectievelijk positief definiet, negatief definiet en semidefiniet?

3. Gegeven zijn

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal de eigenwaarden van de matrix $A^\top A$ en de bijbehorende singuliere waarden.

(b) Bepaal de singuliere waarden ontbinding van de matrix A.

(c) Bereken de pseudo inverse A^+ van A.

(d) Bereken de kleinste kwadraten oplossing $\vec{x}^*$ van het stelsel vergelijkingen $A\vec{x} = \vec{b}$.

(e) Bewijs dat de matrix A injectief is en vind een links inverse van A.

4. De $n \times n$ matrix A is zowel symmetrisch als orthogonaal.

(a) Bewijs dat eigenwaarden van de matrix A alleen gelijk kunnen zijn aan 1 of -1.

(b) Gegeven is $n = 3$, $\text{tr}(A) = 1$ en $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ is een eigenvector bij eigenwaarde -1. Bepaal de matrix A.