Herkansing Lineaire Algebra IV 12 januar 2011, zaal M3.01.

1. (20 punten) Beschouw de volgende matrix A en vector $\vec{w}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \vec{w} = \begin{pmatrix} \frac{-1+i}{2} \\ \frac{-1-i}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

waarbij $i = \sqrt{-1}$.

(a) Toon aan dat $\vec{w}$ een eigenvector van de matrix A is en bepaal de bijbehorende eigenwaarde.

(b) Toon aan dat 3 een eigenwaarde is van de matrix A. Aan wat is dan de derde eigenwaarde gelijk?

(c) Bepaal de drie bijbehorende eigenvectoren.

(d) Bepaal de lengte van de eigenvectoren.

Uitwerking

(a) $A\vec{w} = \begin{pmatrix} \frac{-1-i}{2} \\ \frac{1-i}{2} \\ i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \frac{-1+i}{2} \\ \frac{-1-i}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ bijbehorende eigenwaarde is i.

(b) $\mathrm{Tr}(A) = 3 \Longrightarrow i + 3 - i = 3 \Longrightarrow$tweede eigenwaarde is de complex toegevoegde $-i$ en derde is 3.

(c) $\lambda_1 = i, \vec{w} = \begin{pmatrix} \frac{-1+i}{2} \\ \frac{-1-i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = -i, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{-1-i}{2} \\ \frac{-1+i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_3 = 3, \ \vec{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

(d) $\| \vec{w} \|^2 = (\vec{w}^* \cdot \vec{w}) = \left(\frac{-1-i}{2}\right)\left(\frac{-1+i}{2}\right) + \left(\frac{-1+i}{2}\right)\left(\frac{-1-i}{2}\right) + 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2$

$\| \vec{v} \|^2 = (\vec{v}^* \cdot \vec{v}) = \left(\frac{-1+i}{2}\right)\left(\frac{-1-i}{2}\right) + \left(\frac{-1-i}{2}\right)\left(\frac{-1+i}{2}\right) + 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2$ en $\| \vec{f} \|^2 = 9.$

$\| \vec{w} \| = \| \vec{v} \| = \sqrt{2}$ en $\| \vec{f} \| = 3.$

2. (20 punten) (a) Zij B een 3×3 symmetrische matrix.

(a) Gegeven is $\mathrm{tr}(B) = 6$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top$ is een eigenvector met bijbehorende eigenwaarde 6 en de matrix B heeft een dubbele eigenwaarde, de algebraïsche multipliciteit is gelijk aan twee. Bepaal de overige eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren.

(b) Gebruik de spectrale decompositie of een andere methode om de matrix B te bepalen.

Uitwerking

(a) Gegeven is $n = 3$, $\text{tr}(B) = 6$ en $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top$ is een eigenvector met bijbehorende eigenwaarde 6 en de matrix B heeft een dubbele eigenwaarde. Dan geldt, $6 + 2\lambda_2 = 6 \Longrightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Matrix B is symmetrisch$\Longrightarrow E_0 \perp E_6$ of $E_0 = (E_6)^\perp \Longrightarrow$

$$E_0 = \text{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \text{span}\ (\vec{v}_1, \vec{v}_2)\,.$$

De eigenwaarden van de matrix A zijn $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ en $\lambda_3 = 6$ en bijbehorende eigenvectoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ en $\vec{v}_3$.

(b) Spectrale decompositie: $S^{-1}BS = D$ of $B = SDS^\top$, waarbij de orthogonale matrix $S = (\vec{w}_1\ \vec{w}_2\ \vec{w}_3)$, de vectoren $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ zijn de genormaliseerde eigenvectoren en de matrix

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$B = (\vec{w}_1\ \vec{w}_2\ \vec{w}_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{w}_1^\top \\ \vec{w}_2^\top \\ \vec{w}_3^\top \end{pmatrix} = 6\vec{w}_3\vec{w}_3^\top = 6\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hetzelfde resultaat wordt verkregen door

$$B \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. (20 punten) Beschouw het volgend dynamisch systeem

$$\vec{v}_{t+1} = A\vec{v}_t,$$

en de matrix A is gegeven door

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal de eigenwaarden van de matrix A en de bijbehorende eigenvectoren.

(b) Schrijf $\vec{v}_t$, met $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, in termen van de eigenwaarden en eigenvectoren van A.

(c) Voor welke basisvectoren $\vec{v}_0$ geldt $\lim_{t\to\infty}\vec{v}(t) = \vec{0}$? Schets een dergelijke baan $\{\vec{v}_t\}$. Hoe ziet de baan van $\vec{v}_t$ eruit voor de overige beginvectoren? Schets zo een baan.

(d) Schets de oplossingen en de mogelijke asymptoten.

Uitwerking

(a) De eigenwaarden van de matrix A en bijbehorende eigenvectoren zijn, $\lambda_1 = 4/3$ en $\lambda_2 = 2/3$ en eigenvectoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b)

$$\vec{v}_t = A^t\vec{v}_0 = c_1\left(\frac{4}{3}\right)^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\left(\frac{2}{3}\right)^t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Indien $c_1 = 0 \Longrightarrow$

$$\vec{v}_t = c_2\left(\frac{2}{3}\right)^t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wanneer $t \longrightarrow \infty$, en voor de basisvectoren

$$\vec{v}_0 = c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wanneer $c_1 \neq 0 \Longrightarrow$

$$\vec{v}_t = c_1\left(\frac{4}{3}\right)^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wanneer $t \longrightarrow \infty$, en voor de basisvectoren

$$\vec{v}_0 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De banen van $\vec{v}_t$ benaderen de asymptoten gegeven door de eigenruimten van A of de lijnen $y = x$ en $y = -x$.

4. (25 punten) Gegeven is de matrix C

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal de eigenwaarden van de matrix C en bijbehorende eigenvectoren.

(b) Waarom geldt$\mid \lambda \mid = 1$ voor alle eigenwaarden van C?

(c) Bepaal een inverteerbare matrix P zodanig dat $CP = PG$, waarbij G een diagonaalmatrix is.

(d) Bepaal C^{100}

Uitwerking

(a) $\lambda_1 = 1, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = i, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_3 = -i, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(b) Matrix C is een orthogonale matrix.

(c) $P = \begin{pmatrix} 0 & -i & i \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow C = PGP^{-1}$ en $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$

(d) $C^{100} = PG^{100}P^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3$.

5. (15 punten) Beschouw de $n \times n$ inverteerbare matrix U. Bewijs de volgende eigenschap

Zij $\vec{v}$ een eigenvector van matrix U met bijbehorende eigenwaarde λ, dan is $\vec{v}$ een eigenvector van U^{-1} met eigenwaarde $(1/\lambda)$.

Uitwerking

Beschouw: $U\vec{v} = \lambda\vec{v} \Longrightarrow U^{-1}U\vec{v} = U^{-1}\lambda\vec{v} \Longrightarrow \vec{v} = \lambda U^{-1}\vec{v}$.Omdat $\mathrm{Det}(U) \neq 0$ dan zijn alle eigenwaarden verschillend van nul, bijgevolg $U^{-1}\vec{v} = \vec{v}/\lambda$.