

Tentamen lineaire algebra IV, 27 oktober 2009

1. Beschouw de volgende matrix A en vector \vec{w}

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Toon aan dat \vec{w} een eigenvector van de matrix A is en bepaal de bijbehorende eigenwaarde.

(b) Toon aan dat 6 een eigenwaarde is van de matrix A .

Bepaal een basis voor de bijbehorende eigenruimte.

Wat is de algebraïsche multipliciteit van eigenwaarde 6?

(c) Bepaal een diagonaalmatrix D en een inverteerbare matrix P zo dat $AP = PD$.

Uitwerking

(a) $A\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \implies$ bijbehorende eigenwaarde is 0.

(b) $A - 6I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3 & -3 & 6 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\implies \text{rang}(A - 6I_3) = 1 \implies \dim \text{Ker}(A - 6I) \neq 0.$

$\text{Ker}(A - 6I) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, meetkundige en algebraïsche

multipliciteit zijn gelijk aan 2.

(c) $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ en $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

2. Beschouw het getal

$$z = \frac{-\lambda + i}{\lambda + i},$$

waarbij $\lambda \in \mathbb{R}$ en $i = \sqrt{-1}$.

(a) Schrijf z onder de vorm $a + ib$ en specificeer a en b .

- (b) Toon aan dat de modulus van het getal z gelijk is aan 1.
 (c) Voor welke waarde van λ is het argument van z gelijk aan $(\pi/3)$?
 (d) Bepaal de oplossingen van de vergelijking

$$w^2 - \frac{-\lambda + i}{\lambda + i} = 0$$

voor de gevonden waarde van λ in (c). Teken de oplossingen.

Uitwerking

$$(a) z = \frac{-\lambda + i}{\lambda + i} = \frac{-(\lambda - i)(\lambda - i)}{\lambda^2 + 1} = \frac{-(\lambda^2 - 2i - 1)}{\lambda^2 + 1} = \frac{-\lambda^2 + 1}{\lambda^2 + 1} + \frac{2\lambda 2i}{\lambda^2 + 1}$$

$$a = \frac{-\lambda^2 + 1}{\lambda^2 + 1}, b = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 1}.$$

$$(b) r^2 = |z|^2 = a^2 + b^2 = \frac{(1 - \lambda^2)^2 + 4\lambda^2}{(\lambda^2 + 1)^2} = \frac{1 + 2\lambda^2 + \lambda^4}{(\lambda^2 + 1)^2} = \frac{(\lambda^2 + 1)^2}{(\lambda^2 + 1)^2} = 1.$$

$$(c) \cos(\pi/3) = 1/2 \implies \sin(\pi/3) = (\sqrt{3}/2),$$

$$\cos(\vartheta) = (a/r) = a = \frac{-\lambda^2 + 1}{\lambda^2 + 1} = 1/2 \implies -3\lambda^2 + 1 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Voor } \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies z_1 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \vartheta = (\pi/3)$$

en

$$\lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \implies z_2 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \vartheta = -(\pi/3) \implies$$

correcte keuze is dan $\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$(d) w_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \text{ en } w_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}.$$

3. Gegeven is de vierkante matrix B

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- (a) Bepaal de eigenwaarden van de matrix B en bijbehorende eigenvectoren.
 (b) Bepaal een inverteerbare matrix S en getallen p en q zó dat

$$B = S \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} S^{-1}.$$

(c) Bepaal B^{24} .

Uitwerking

$$(a) \text{Det}(B - \lambda I_2) = \text{Det} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \lambda + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \lambda - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (\frac{1}{2}\sqrt{3} + \lambda)^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \lambda\right)^2 + \frac{1}{4} \implies \lambda_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i \text{ en } \lambda_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i \implies$$

$$\text{eigenvectoren } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$(b) p = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ en } q = \frac{1}{2} \text{ en } S = (\text{Im } \vec{v}_1, \text{Re } \vec{v}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$(c) B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1},$$

en de matrix $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$ is de matrix van de draaiing met hoek $\theta = (5\pi/6)$.

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}^{24} = \begin{pmatrix} \cos(5\pi/6) \cos(5\pi/6) & -\sin(5\pi/6) \\ \sin(5\pi/6) & \cos(5\pi/6) \end{pmatrix}^{24} = \begin{pmatrix} \cos(20\pi) & -\sin(20\pi) \\ \sin(20\pi) & \cos(20\pi) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{24} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(20\pi) & -\sin(20\pi) \\ \sin(20\pi) & \cos(20\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

4. Zij $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ en F een matrix gedefinieerd door middel van

$$F\vec{x} = (\vec{v} \cdot \vec{x})\vec{v} - \vec{x}$$

voor alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

(a) Bewijs dat F een symmetrische matrix is.

Gebruik hiervoor de volgende definitie van een symmetrische matrix M

$$(M\vec{x} \cdot \vec{y}) = (\vec{x} \cdot M\vec{y}).$$

(b) Bewijs dat F een orthogonale matrix is als $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$.

Uitwerking

(a) Voor een symmetrische matrix F geldt $(F\vec{x} \cdot \vec{y}) = (\vec{x} \cdot F\vec{y})$.

Bereken het linkerlid: $(F\vec{x} \cdot \vec{y}) = ((\vec{v} \cdot \vec{x})\vec{v} - \vec{x}) \cdot \vec{y} = (\vec{v} \cdot \vec{x})(\vec{v} \cdot \vec{y}) - (\vec{x} \cdot \vec{y})$.

Het rechterlid wordt: $(\vec{x} \cdot F\vec{y}) = (\vec{x} \cdot ((\vec{v} \cdot \vec{y})\vec{v} - \vec{y})) = (\vec{v} \cdot \vec{y})(\vec{x} \cdot \vec{v}) - (\vec{x} \cdot \vec{y})$

$\implies (F\vec{x} \cdot \vec{y}) = (\vec{x} \cdot F\vec{y}) \implies$ matrix F is symmetrisch.

Alternatief bewijs:

$$F\vec{x} = (\vec{v} \cdot \vec{x})\vec{v} - \vec{x}$$

$$\begin{aligned}
&= \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{x}) - \vec{x} \\
&= \vec{v}\vec{v}^\top \vec{x} - \vec{x} \\
&= \left(\vec{v}\vec{v}^\top - I_n \right) \vec{x}.
\end{aligned}$$

\implies

$$F = \left(\vec{v}\vec{v}^\top - I_n \right) = F^\top.$$

(b) Orthogonaliteit impliceert $\|F\vec{x}\| = \|\vec{x}\| \implies$

$$\begin{aligned}
\|F\vec{x}\|^2 &= ((\vec{v} \cdot \vec{x}) \vec{v} - \vec{x}) \cdot ((\vec{v} \cdot \vec{x}) \vec{v} - \vec{x}) \\
&= (\vec{v} \cdot \vec{x})^2 \|\vec{v}\|^2 - 2(\vec{v} \cdot \vec{x})^2 + \|\vec{x}\|^2
\end{aligned}$$

Indien $\|\vec{v}\|^2 = 2 \implies \|F\vec{x}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \implies \|F\vec{x}\| = \|\vec{x}\|.$