

Tentamen Lineaire Algebra IV 2 november 2010, zaal B.

1. (15 punten) Beschouw de volgende matrix A en vector \vec{w}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Toon aan dat \vec{w} een eigenvector van de matrix A is en bepaal de bijbehorende eigenwaarde.
(b) Motiveer waarom 0 een eigenwaarde is van de matrix A . Aan wat is dan de derde eigenwaarde gelijk?
(c) Bepaal de drie bijbehorende eigenvectoren.

Uitwerking

(a) $A\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \implies$ bijbehorende eigenwaarde is 1

(b) $\text{Det}(A) = 0 \implies \text{Ker}(A) \neq 0 \implies 0$ is een eigenwaarde $\implies \text{Tr}(A) = 4 \implies$ derde eigenwaarde is 3.

(c) $\lambda_1 = 0, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 1, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda_3 = 3, \vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

2. (20 punten) (a) Bepaal de nulpunten van $z^3 = 1$.
(b) Beschouw het nulpunt w , een complex getal met argument gelijk aan $(2\pi/3)$.
Schrijf de overige nulpunten in termen van machten van w .
(c) Beschouw de 3×3 Fourier matrix

$$F = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w^4 \end{pmatrix}.$$

Schrijf de elementen van de matrix F in termen van $e^{2\pi i/3}$, waarbij $i = \sqrt{-1}$.

- (d) Ga na de eigenschap $F^*F = I_3$, F^* is de complex toegevoegde getransponeerde van matrix F , bepaal dan de inverse F^{-1} in termen van $e^{2\pi i/3}$.

Uitwerking

$$(a) w_0 = 1, w = w_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, w_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$(b) w_0 = w^0, w_1 = w, w_2 = w^2.$$

$$(c) F = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{2\pi i/3} & e^{4\pi i/3} \\ 1 & e^{4\pi i/3} & e^{8\pi i/3} \end{pmatrix}.$$

$$(d) F^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-2\pi i/3} & e^{-4\pi i/3} \\ 1 & e^{-4\pi i/3} & e^{-8\pi i/3} \end{pmatrix} \implies F^*F = I_3 \implies F^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-2\pi i/3} & e^{-4\pi i/3} \\ 1 & e^{-4\pi i/3} & e^{-8\pi i/3} \end{pmatrix}.$$

3. (25 punten) Beschouw de kwadratische vorm van de 3 variabelen x_1, x_2, x_3 en h

$$Q(x_1, x_2, x_3) = hx_1^2 + hx_2^2 + hx_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

(a) Schrijf $Q(x_1, x_2, x_3)$ als $\vec{x}^\top C \vec{x}$ waarbij C een symmetrische matrix is en $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$.

(b) Bepaal de eigenwaarden λ_1, λ_2 en λ_3 van de matrix C en bijbehorende eigenvectoren.

(c) Voor welke waarden van h is de matrix C positief definit en positief semidefinit.

(d) Voor welke waarden van h is de matrix C negatief definit.

(e) Voor welke waarden van h is de matrix C onbepaald.

Uitwerking

$$(a) C = \begin{pmatrix} h & 1 & -1 \\ 1 & h & 1 \\ -1 & 1 & h \end{pmatrix}.$$

$$(b) \lambda_{1,2} = 1 + h, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = h - 2, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Matrix C positief definit $\implies \lambda_{1,2} > 0$ en $\lambda_3 > 0 \implies 1 + h > 0$ en $h - 2 > 0 \implies h > 2$.

Matrix C positief semidefinit $\implies \lambda_{1,2} \geq 0$ en $\lambda_3 \geq 0 \implies h \geq 2$.

(d) Matrix C negatief definit $\implies \lambda_{1,2} < 0$ en $\lambda_3 < 0 \implies 1 + h < 0$ en $h - 2 < 0 \implies h < -1$.

(e) Matrix C onbepaald $\implies \lambda_{1,2} > 0$ en $\lambda_3 < 0 \implies h + 1 > 0$ en $h - 2 < 0 \implies -1 < h < 2$.

4. (25 punten) Beschouw de rotatiematrix

$$B = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

- (a) Bepaal de eigenwaarden van de matrix B en bijbehorende eigenvectoren.
 (b) Bepaal een inverteerbare matrix P zodanig dat $BP = PD$, waarbij D een diagonaalmatrix is.
 (c) Gebruik de resultaten in (c) om de volgende eigenschap te bewijzen

$$B^n = \begin{pmatrix} \cos(n\vartheta) & -\sin(n\vartheta) \\ \sin(n\vartheta) & \cos(n\vartheta) \end{pmatrix}$$

voor $n > 1$.

Uitwerking

(a) $\lambda_1 = \cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta)$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = \cos(\vartheta) - i \sin(\vartheta)$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) $P = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies B = PDP^{-1}$ en $D = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta) & 0 \\ 0 & \cos(\vartheta) - i \sin(\vartheta) \end{pmatrix}$

(c) $B^n = PD^nP^{-1}$ volgens De Moivre geldt

$$D^n = \begin{pmatrix} \cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta) & 0 \\ 0 & \cos(n\vartheta) - i \sin(n\vartheta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} B^n &= PD^nP^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta) & 0 \\ 0 & \cos(n\vartheta) - i \sin(n\vartheta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(n\vartheta) & -\sin(n\vartheta) \\ \sin(n\vartheta) & \cos(n\vartheta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5. (15 punten) Beschouw de 3×3 symmetrische matrix K .

(a) Zij de vectoren \vec{v} en \vec{w} in \mathbb{R}^n , bewijs de gelijkheid

$$(K\vec{v} \cdot \vec{w}) = (\vec{v} \cdot K\vec{w}),$$

waarbij $(\vec{v} \cdot \vec{w})$ het scalair product is van de vectoren \vec{v} en \vec{w} .

(b) Bewijs dat de eigenwaarden van een symmetrische matrix nooit complex zijn.

Uitwerking

(a) Linker lid: $(K\vec{v} \cdot \vec{w}) = \vec{w}^\top K\vec{v}$, rechter lid: $(\vec{v} \cdot K\vec{w}) = \vec{w}^\top K^\top \vec{v} = \vec{w}^\top K\vec{v} \implies (K\vec{v} \cdot \vec{w}) = (\vec{v} \cdot K\vec{w})$.

(b) Indien $\lambda \in \mathbb{C}$ en bijgevolg $\vec{v} \in \mathbb{C}^n \implies (K\vec{v} \cdot \vec{v}) = (\vec{v} \cdot K\vec{v}) \implies (\lambda\vec{v} \cdot \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \lambda\vec{v}) \implies$

$\lambda\vec{v}^* \vec{v} = \bar{\lambda}\vec{v}^* \vec{v} \implies \lambda = \bar{\lambda} \implies \lambda$ is reëel.