Faculteit Economie en Bedrijfskunde
Afdeling Kwantitatieve Economie

Wiskunde IV AEO, onderdeel Analyse **Maandag 11 januari 2010, 14–16 uur**

- Het is toegestaan gebruik te maken van een rekenmachine.
- Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven.
- Beoordeling: voor de onderdelen 1 (b), 1 (c), en 3 (a) zijn 4 punten te verdienen, alle andere onderdelen 3 punten. Daarmee komt het totaal aantal te behalen punten op 48.
- Maximale score wordt alleen toegekend aan helder gemotiveerde en correcte antwoorden.
- Het cijfer wordt bepaald als $\frac{1}{5} \cdot (\text{score} + 2)$.
- De uitslag is uiterlijk binnen drie weken bekend.
- Het werk wordt op het Secretariaat Econometrie (E3.02) ter inzage aangeboden. Voor dit onderdeel heb je 120 minuten de tijd. Succes!

Opgave 1

Becommentarieer de volgende stellingen over rijen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Geef telkens een argument waarom ze juist zijn, of een tegenvoorbeeld indien onjuist.

(a) Als $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert, dan $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) Als $a_n = (-1)^n \dfrac{n+4}{n^2-101}$ dan is $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ conditioneel convergent.

(c) Stel $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Dan convergeert $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ als $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absoluut convergent is.

Uitwerking Opgave 1

(a) Juist. Schrijf $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Dan bestaat $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Verder:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - s_{n-1} = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

(b) Juist. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is convergent, maar niet absoluut.

(*) Convergentie: de rij $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ is monotoon dalend vanaf rangnummer $N = 10$, en tevens $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Dan volgt convergentie uit de stelling over convergentie van alternerende rijen.

(**) Geen absolute convergentie: vergelijk de rij $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ met de harmonische rij. Dan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{1/n} = 1.$$

Op grond van het vergelijkingscriterium divergeert de reeks $\sum b_n$, net als $\sum \frac{1}{n}$ dat ook doet.

(c) Voor iedere $\varepsilon > 0$ is er een N zodat

$$n \geq N \implies \left|\frac{a_n}{b_n}\right| < \varepsilon \implies |a_n| < \varepsilon\,|b_n|\,.$$

Dus, omdat $\sum_{n=N}^{\infty} |b_n|$ bestaat, bestaat ook $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$ vanwege gemajoreerde convergentie stelling. In het bijzonder dan ook $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ omdat absolute convergentie normale convergentie impliceert.

Opgave 2

Gegeven is de volgende *Mathematica* output:

```
In[83]:= k[x_] = 2 x / (x^3 - x^2 - x + 1);
         K[x_] = FullSimplify[Integrate[k[x], x]]
         Table[N[K[n]], {n, 2, 9}]
Out[84]= 1/2 (-2/(-1 + x) + Log[-1 + x] - Log[1 + x])
Out[85]= {-1.54931, -0.846574, -0.588746, -0.452733, -0.368236, -0.310508, -0.268514, -0.236572}
```

(a) Maak uitsluitend gebruik van deze output om convergentie van de reeks

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n}{n^3 - n^2 - n + 1}$$

aan te tonen.

(b) Geef met integraalresten aan wat de minimale en maximale fout is bij de benadering voor de som

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n}{n^3 - n^2 - n + 1} \approx \sum_{n=2}^{6} \frac{2n}{n^3 - n^2 - n + 1} = 2.05885$$

(c) Maak op grond van de output een benadering van S die tot op 0.06 nauwkeurig is. Motiveer waarom je benadering aan de gestelde nauwkeurigheid voldoet.

Uitwerking Opgave 2

(a) Met het Integraalcriterium volgt

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n}{n^3 - n^2 - n + 1} \text{ is convergent } \iff \int_2^{\infty} \frac{2x}{x^3 - x^2 - x + 1} dx \text{ is convergent.}$$

Uitwerken van het rechterlid van de bewering geeft:

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{2x}{x^3 - x^2 - x + 1} dx &= \lim_{t\to\infty} \int_2^{t} \frac{2x}{x^3 - x^2 - x + 1} dx \\ &= \lim_{t\to\infty} \{K(t) - K(2)\} = -K(2) \approx 1.54931 < \infty. \end{aligned}$$

Dus is de gevraagde reeks convergent.

(b) Er geldt voor alle $n \geq 2$ dat

$$\int_{n+1}^{\infty} k(x)\, dx \leq s - s_n \leq \int_n^{\infty} k(x)\, dx \iff -K(n+1) \leq s - s_n \leq -K(n).$$

Neem nu $n = 6$, dan

$$0.310508 \leq s - s_6 \leq 0.368236.$$

(c) Merk op dat we uit de laatste ongelijkheid in (b) ook halen dat

$$2.3694 = 0.310508+2.05885 = 0.310508+s_6 \leq s \leq 0.368236+s_6 = 0.368236+2.05885 = 2.4271$$

De linker- en rechterterm liggen $2.4271 - 2.3694 = 0.0577 < 0.06$ uit elkaar. Neem dus bijvoorbeeld als benaderde waarde 2.3694.

Opgave 3

Gegeven is de functie f als machtreeks door $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^{2n}}{3^n}$.

(a) Bepaal het domein van f.

(b) Bepaal een primitieve van f.

(c) Bepaal $\int_3^4 f(x)\ \mathrm{d}x$ tot op 0.01 nauwkeurig.

Uitwerking Opgave 3

(a) Gebruik hier het convergentiecriterium van D 'Alembert. Definieer $a_n = (-1)^n \frac{(x-3)^{2n}}{3^n}$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\frac{(x-3)^{2n+2}}{3^{n+1}}}{(-1)^n\frac{(x-3)^{2n}}{3^n}}\right| = \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^2}{3}\right| = \frac{1}{3}\left|(x-3)^2\right|.\end{aligned}$$

De machtreeks convergeert voor waarden van x waarvoor $\frac{1}{3}\left|(x-3)^2\right| < 1$, en divergeert voor waarden van x waarvoor $\frac{1}{3}\left|(x-3)^2\right| > 1$. Welnu

$$\frac{1}{3}\left|(x-3)^2\right| < 1 \Longleftrightarrow |x-3| < \sqrt{3} \Longleftrightarrow x \in \left(3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}\right).$$

Bekijk randpunten van dit interval:

$$x = 3 \pm \sqrt{3} : \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^{2n}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \text{ divergent.}$$

Het domein van f wordt dus gegeven door interval $\left(3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}\right)$.

(b) Een primitieve van f bepalen we door termsgewijze integratie:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int (-1)^n \frac{(x-3)^{2n}}{3^n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^{2n+1}}{(2n+1)\,3^n}$$

is primitieve van f.

(c) De machtreeks voor deze functie heeft dezelfde convergentiestraal als die behorend bij f : $\sqrt{3}$. Dus in ieder geval is F primitieve van f op $[3,4] \subset \left(3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}\right)$. Uit de Hoofdstelling van de Analyse volgt dat we F kunnen nemen om de gevraagde integraal te berekenen.

$$\begin{aligned}
\int_3^4 f(x)\,dx &= F(4) - F(3) = F(4) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(4-3)^{2n+1}}{(2n+1)\,3^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\,3^n} = -\frac{1}{3\cdot 3^1} + \frac{1}{5\cdot 9} - \frac{1}{7\cdot 27} + \ldots \\
&\approx -\frac{1}{3\cdot 3^1} + \frac{1}{5\cdot 9} = -\frac{4}{45} \text{ met een onnauwkeurigheid } \frac{1}{7\cdot 27} \approx 5.291\times 10^{-3} < 0.01.
\end{aligned}$$

Opgave 4

Zij h en k twee functies gedefinieerd op een omgeving van 0. Neem aan dat de respectievelijke McLaurinreeksen op deze omgeving convergent zijn naar de functie zelf. De volgende *Mathematica* output is gegeven:

```
In[101]:= Series[h[x], {x, 0, 5}]
          Series[k[x], {x, 0, 6}]
```

Out[101]= $x - \frac{x^3}{6} + O[x]^6$

Out[102]= $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^5 + O[x]^7$

(a) Bepaal hieruit $h'''(0)$ en $k^{(6)}(0)$.

(b) Geef de volledige Taylorreeksontwikkeling van de functie $x \mapsto e^x$ en $x \mapsto \sin(x)$ in $a = 0$.

Dat wil zeggen: schrijf beide functies in de vorm $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

(c) Bepaal met gebruikmaking van onderdeel (b):

$$\lim_{x\to 0} \frac{k(x) - e^x}{h(x) - \sin(x)}.$$

Uitwerking Opgave 4

(a) In een gegeven McLaurinreeksontwikkeling $\sum a_n x^n$ bij een functie f geldt voor alle n dat $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Dus hier geldt

$$\begin{aligned} \frac{h'''(0)}{3!} &= -\frac{1}{6} :\Longrightarrow h'''(0) = -1, \\ \frac{k^{(6)}(0)}{6!} &= 0 :\Longrightarrow k^{(6)}(0) = 0. \end{aligned}$$

(b) Dit zijn standaard ontwikkelingen:

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \\ \sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{k(x) - e^x}{h(x) - \sin(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^5 + O(x^7) - e^x}{x - \frac{x^3}{6} + O(x^6) - \sin(x)} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^5 - \frac{1}{5!}x^5 + O(x^6)}{\frac{1}{5!}x^5 + O(x^6)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 - \frac{1}{5!}\right)x^5 + O(x^6)}{\frac{1}{5!}x^5 + O(x^6)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 - \frac{1}{5!}\right) + O(x)}{\frac{1}{5!} + O(x)} = \frac{\left(1 - \frac{1}{5!}\right)}{\frac{1}{5!}} = 119. \end{aligned}$$

Opgave 5

Gegeven is de functie $g(x) = \sqrt{16 + x^2} - x$ en bijbehorende afgeleiden

$$\begin{aligned} g'(x) &= -1 + \frac{x}{\sqrt{16 + x^2}} \\ g''(x) &= \frac{16}{(16 + x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

(a) Bepaal de lineaire benadering en kwadratische benadering van g in $a = 3$.

(b) Laat zien dat $|g''(x)| \leq 0.3$ voor $x \in [3, 4]$ en leid hieruit de kwaliteit van de lineaire benadering voor g op $[3, 4]$ af.

(c) Toon aan dat de kwadratische benadering voor g op het interval $[3, 4]$ tot op 0.05 nauwkeurig is. Welke benadering is beter, de lineaire of de kwadratische, of is hier niets over te zeggen?

Uitwerking Opgave 5

(a) We bepalen eerste de eerste en tweede orde afgeleide van g:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -1 + \frac{x}{\sqrt{16+x^2}} \\ g''(x) &= \frac{16}{(16+x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

De lineaire en kwadratische benadering wordt respectievelijk gegeven door:

$$\begin{aligned} L(x) &= g(3) + g'(3)(x-3) = 2 + -\frac{2}{5}(x-3). \\ K(x) &= L(x) + \frac{g''(3)}{2!}(x-3)^2 = 2 + -\frac{2}{5}(x-3) + \frac{8}{125}(x-3)^2. \end{aligned}$$

(b) Stelling van Taylor

$$\begin{aligned} |g(x) - L(x)| &\leq \max_{y\in[3,4]} |g''(y)| \cdot \frac{|x-3|^3}{3!} \\ &= g''(3) \cdot \frac{|x-3|^3}{3!} \\ &= \frac{16}{125} \cdot \frac{|x-3|^3}{3!}. \end{aligned}$$

Dus op het interval is de afwijking maximaal

$$\frac{16}{125} \cdot \frac{|4-3|^3}{3!} = \frac{8}{375} \approx 2.1333 \times 10^{-2}.$$

:

(c) Nogmaals de Stelling van Taylor:

$$\begin{aligned} |g(x) - K(x)| &\leq \max_{y\in[3,4]} |g'''(y)| \cdot \frac{|x-3|^3}{3!} \\ &= \max_{y\in[3,4]} \frac{48y}{(y^2+16)^{\frac{5}{2}}} \cdot \frac{|x-3|^3}{3!} \\ &= \frac{48\cdot 3}{(3^2+16)^{\frac{5}{2}}} \cdot \frac{|x-3|^3}{3!} \end{aligned}$$

Dus op het interval is de afwijking maximaal voor $x = 4$,

$$\frac{48\cdot 3}{(3^2+16)^{\frac{5}{2}}} \cdot \frac{1}{3!} = \frac{24}{5^5} \approx 0.00768.$$

Einde deel Analyse, Wiskunde IV AEO