



Faculteit Economie en Bedrijfskunde
Afdeling Kwantitatieve Economie

Wiskunde IV AEO, onderdeel Analyse

dinsdag 15 juni 2010, 9–11 uur

Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven, waarvoor in totaal 50 punten te verdienen zijn; de waardering per onderdeel is als in onderstaande tabel.

1a	1b	1c	2	3a	3b	4a	4b	5a	5b	5c	6a	6b	6c	totaal
4	3	2	5	3	4	3	4	4	3	5	4	2	4	50

Maximale score wordt alleen toegekend aan helder gemotiveerde en correcte antwoorden. Het cijfer wordt bepaald als $\frac{1}{5}$ · score. De uitslag is uiterlijk binnen drie weken bekend. Voor inzage van het beoordeelde werk dien je een afspraak te maken (mkoster@uva.nl). Voor dit onderdeel heb je 120 minuten de tijd. Succes!

Opgave 1

Gegeven is de functie $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ door $f(x) = \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + x}$ voor alle x . Definieer nu recursief de rij $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ door

$$\begin{cases} a_1 = 4, \\ a_{n+1} = f(a_n) \text{ voor } n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

- (a) Bewijs dat $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ monotoon is.
- (b) Bewijs dat $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergent is.
- (c) Bepaal de limiet $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Opgave 2

Bepaal $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n+2)}$.

Opgave 3

Gegeven is de rij $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{ne^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$. Zij $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ de bijbehorende rij van partiële sommen.

- (a) Laat zien dat $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sommeerbaar is.
- (b) Zij s de som van de reeks. Geef een integraalafschatting van de minimale en maximale fout wanneer we s benaderen met s_9 . Hoe kan je deze afchatting gebruiken om te komen tot een benadering die een nauwkeurigheid van 0.001 garandeert?

ZIE OMMEZIJDE!!!

Opgave 4

- (a) Geef de McLaurin reeks voor $p(x) = x \sin x$.
- (b) Zij $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een functie waarvoor $k(x) = x + x^2 + x^3 + \mathcal{O}(x^4)$ voor $x \rightarrow 0$.
Bepaal $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(k(x))^2 - p(x)}{x^3}$.

Opgave 5

Gegeven is de functie $g : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ door

$$g(x) = \frac{1}{1+x^3} \text{ voor alle } x.$$

- (a) Bepaal de coëfficiëntenrij $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ zodat $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ op een niet-leeg interval. Wat is het interval van convergentie van deze reeks?
- (b) Bepaal $g^{(99)}(0)$ en $g^{(100)}(0)$ (zonder directe differentiatie).
- (c) Bepaal een primitieve van g en daarmee $\int_0^{1/2} g(x) dx$ tot op 0.001 nauwkeurig.

Opgave 6

Gegeven is de functie $k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ door $k(x) = (2+x)^{1/3}$.

- (a) Bepaal de lineaire en kwadratische benadering van k in $a = 25$.
- (b) Geef een benadering van $28^{1/3}$ met behulp van de kwadratische benadering uit het vorige onderdeel.
- (c) Hoe goed is de gevonden benadering op basis van de *Stelling van Taylor*?