Wiskunde IV AEO, Analyse di 15 juni 2010, 9-11 uur.

Opgave 1

(a) Merk op dat $a_1 = 4 > \sqrt{8} = a_2$, dus we zullen aantonen dat $\{a_n\}$ monotoon dalend is, oftewel dat

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}.$$

Deze condities kunnen alleen gelden wanneer voor alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt{\tfrac{1}{4} a_n^2 + a_n} \leq a_n \Rightarrow \tfrac{1}{4} a_n^2 + a_n \leq a_n^2 \Rightarrow$$

$$a_n \left(-\tfrac{3}{4} a_n + 1\right) \leq 0.$$

Mbv. volledige inductie bewijzen we dat $a_n > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ en $a_n \geq \frac{4}{3}$ in het bijzonder, dan zijn we ook klaar.

Stel $P(n): a_n \geq \frac{4}{3}$

$P(1)$ is geldig wel $a_1 = 4 \geq \frac{4}{3}$

Stel $P(n): a_n \geq \frac{4}{3}$. Dan $a_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{4} a_n^2 + a_n} \geq$

$$\overset{*}{\geq} \sqrt{\tfrac{1}{4} \cdot \left(\tfrac{4}{3}\right)^2 + \tfrac{4}{3}} = \sqrt{\tfrac{4}{9} + \tfrac{4}{3}} = \tfrac{4}{3}. \qquad \boxtimes.$$

*: inductie stap.

(b). In (a) hebben we bewezen dat $\{a_n\}$ monotoon is, èn begrensd, dus op grond van de Monotone Convergentiestelling voor rijen volgt dat $\lim_{n\to\infty} a_n$ bestaat

(c) $L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{4} a_n^2 + a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{4} L^2 + L} \Rightarrow L = \frac{4}{3}.$

$L=0$ valt af.

Opgave 2

Voor $k \geq 2$, met breuksplitsen, volgt:

$$\sum_{n=2}^{k} \frac{1}{(n-1)(n+2)} = \sum_{n=2}^{k} \left(\frac{1/3}{n-1} - \frac{1/3}{n+2} \right) = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

(telescoopsom!) en dus voor $k \to \infty$

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{(n-1)(n+2)} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right) = \frac{11}{18}.$$

Opgave 3

(a) Zij $f(x) = xe^{-x}$. Dan $a_n = f(n) \geq 0$.

Integraal Test:

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \left[e^{-x}(-1-x)\right]_1^{\infty} = \frac{2}{e} < \infty$$

dus is $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n$ convergent.

(b) Er geldt voor alle n:

$$\frac{n+2}{e^{n+1}} = \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leq s - s_n \leq \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1+n}{e^n}$$

$n=9$: $0.000499399 \leq s - s_n \leq 0.0012341$

dus $s \in [s_9 + 0.000499399, s_9 + 0.012341]$,

interval ter lengte $0.000734699 < 0{,}001$!

Opgave 4

(a) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Dus $p(x) = x \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!} = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} \ldots$

(b) Merk op dat

$$(k(x))^2 = (x + x^2 + x^3 + \mathcal{O}(x^4))(x + x^2 + x^3 + \mathcal{O}(x^4))$$

$$= x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \mathcal{O}(x^5).$$

Dus

$$\lim_{x \to 0} \frac{(k(x))^2 - p(x)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \mathcal{O}(x^5) - (x^2 - \frac{x^4}{3!} + \mathcal{O}(x}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x^3 + \mathcal{O}(x^4)}{x^3} = \lim_{x \to 0} 2 + \mathcal{O}(x) = 2.$$

Opgave 5

(a) $g(x) = \frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{1-(-x^3)} \overset{*}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-x^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n}$

voor $x \in (-1,1)$. $\rightarrow$ interval van convergentie.

$*$: meetkundige reeks.

$c_0 = 1$, $c_1 = c_2 = 0$, $c_3 = -1$, $c_4 = c_5 = 0$, $c_6 = 1$ ...

$$c_k = \begin{cases} (-1)^k & \text{voor } k = 3 \cdot k_1 \quad k_1 \in \mathbb{N}. \\ 0 & k \neq 3 \cdot k_1 \quad k_1 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(b). $g^{(99)}(0) = c_{99} \cdot 99! = -99!$

$g^{(100)}(0) = c_{100} \cdot 100! = 0.$

(c) $$\int g(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1} + C$$

$$\int_0^{1/2} g(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1}}{3n+1} - 0 =$$

$$= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \frac{1}{7} - \dots$$

alternerende reeks met $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1} / (3n+1)$ monotoon dalend.

$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{10} < 0.001$, dus benadering van de som is

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \frac{1}{7} = \frac{463}{896}.$$

Opgave 6

(a) $L(x) = k(25) + k'(25)(x-25) = 3 + \frac{1}{27}(x-25)$

$K(x) = \cancel{k}\, L(x) + \frac{k''(25)}{2}(x-25)^2 = 3 + \frac{1}{27}(x-25) - \frac{(x-25)^2}{2187}.$

(b) $\cancel{kaa6}\ 28^{1/3} = k(26) \approx K(26) = 3 + \frac{1}{27} - \frac{1}{2187} = \frac{6641}{2187}.$

(c) Er geldt $k'''(x) = \frac{10}{27(2+x)^{8/3}}$, dalend op $[25, 26]$.

Taylor: $|k(x) - K(x)| \leq \frac{k'''(25)}{3!}|x-25|^3$ op $[25, 26]$

dus $|\cancel{k}\, 28^{1/3} - K(26)| \leq \frac{5}{531441} \cdot 1^3 \approx 9.4 \cdot 10^{-6}.$