

Tentamen lineaire algebra III, 2 april 2008

1. Beschouw de volgende matrix A en vector \vec{v}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Toon aan dat \vec{v} een eigenvector van de matrix A is en bepaal de bijbehorende eigenwaarde.
- (b) Toon aan dat -1 een eigenwaarde is van de matrix A . Bepaal hiervoor de bijbehorende driedimensionale eigenruimte. Wat is dan de bijbehorende algebraïsche multiplicitéit.
- (c) Gegeven is de determinant van de matrix A is gelijk aan 0. Geef een samenvatting van de eigenwaarden van de matrix A met hun algebraïsche en meetkundige multiplicitéit.

Uitwerking

$$(a) A\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1\vec{v} \implies \text{bijbehorende eigenwaarde is } 1.$$

$$(b) A - (-1)I_5 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies 3 \text{ vrije variabelen, } \implies \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Meetkundige multipliciteit is 3 en algebraïsche multipliciteit} \geq 3.$$

(c) Als $\text{Det } A = 0 \implies 0$ is een eigenwaarde.

Eigenwaarde 1 : Meetkundige multipliciteit is 1 en algebraïsche multipliciteit 1.

Eigenwaarde -1 : Meetkundige multipliciteit is 3 en algebraïsche multipliciteit 3.

Eigenwaarde 0 : Meetkundige multipliciteit is 1 en algebraïsche multipliciteit 1.

2. Beschouw de 3×3 matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal de karakteristieke polynoom $\text{Det}(\lambda I_3 - B)$ van de matrix B .

(b) Bepaal een 3×3 matrix C met als karakteristieke polynoom

$$g_C(\lambda) = \text{Det}(\lambda I_3 - C) = \lambda^3 - 3\lambda + k,$$

waarbij k een constante is.

Om de antwoorden op vraag (c), (d) en (e) nauwkeurig te beschrijven, schets de grafiek van de functie $g_C(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda + k$ en bepaal de lokale extrema (max/min).

(c) Voor welke waarden van k heeft de matrix C drie ongelijke eigenwaarden?

(d) Voor welke waarden van k heeft de matrix C twee ongelijke eigenwaarden?

(e) Voor welke waarden van k heeft de matrix C een eigenwaarde?

Uitwerking

(a) $\text{Det}(\lambda I_3 - B) = \lambda^3 - \lambda^2 c - \lambda b - a.$

(b)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) $|k| < 2$ of $-2 < k < 2.$

(d) $|k| = 2$ of $k = 2$ of $k = -2.$

(e) $|k| > 2$ of $k > 2$ of $k < -2$

3. Gegeven is de vierkante matrix C

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal de eigenwaarden van de matrix C en bijbehorende eigenvectoren.

(b) Bepaal een inverteerbare matrix Q en getallen a en b zó dat

$$C = Q \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

(c) Bepaal C^{19} .

Uitwerking

$$\begin{aligned} \text{(a) Det}(C - \lambda I_2) &= \text{Det} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} - \lambda + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2}\sqrt{3} - \lambda - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (\frac{1}{2}\sqrt{3} - \lambda)^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \\ &= (\frac{1}{2}\sqrt{3} - \lambda)^2 + \frac{1}{4} \implies \lambda_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i \text{ en } \lambda_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i \implies \\ \text{eigenvectoren } \vec{w}_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} \text{ en } \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{(b) } a = \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ en } b = \frac{1}{2} \text{ en } Q = (\text{Re } \vec{w}_2, \text{Im } \vec{w}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{(c) } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$

en de matrix $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$ is de matrix van de draaiing met hoek $\theta = \pi/6$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}^{19} &= \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{pmatrix}^{19} = \begin{pmatrix} \cos(19\pi/6) & -\sin(19\pi/6) \\ \sin(19\pi/6) & \cos(19\pi/6) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^{19} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(19\pi/6) & -\sin(19\pi/6) \\ \sin(19\pi/6) & \cos(19\pi/6) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = -C. \end{aligned}$$

4. Zij λ een eigenwaarde van de vierkante matrix A met bijbehorende eigenvector \vec{x} . Gegeven is een constante α die geen eigenwaarde van A is.

(a) Motiveer waarom de matrix $(A - \alpha I)$ inverteerbaar is.

(b) Bewijs dat $1/(\lambda - \alpha)$ een eigenwaarde is van $(A - \alpha I)^{-1}$ met bijbehorende eigenvector \vec{x} . Begin je bewijs met $A\vec{x} - \alpha\vec{x}$.

Uitwerking

(a) α is geen eigenwaarde van de matrix $A \implies \text{Det}(A - \alpha I) \neq 0 \implies (A - \alpha I)$ is inverteerbaar.

(b) $A\vec{x} - \alpha\vec{x} = (A - \alpha I)\vec{x} = \lambda\vec{x} - \alpha\vec{x} = (\lambda - \alpha)\vec{x}$ of $(A - \alpha I)\vec{x} = (\lambda - \alpha)\vec{x} \implies (\lambda - \alpha)$ is een eigenwaarde van de matrix $(A - \alpha I) \implies (\lambda - \alpha)^{-1}$ is dan een eigenwaarde van de matrix $(A - \alpha I)^{-1}$.