



Faculteit Economie en Bedrijfskunde
Afdeling Kwantitatieve Economie

Wiskunde IV AEO, onderdeel Analyse

dinsdag 28 oktober 2008

Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven, waarvoor in totaal 50 punten te verdienen zijn; de waardering per onderdeel is als in onderstaande tabel.

1a	1b	1c	2a	2b	3a	3b	3c	4a	4b	4c	5a	5b	totaal
3	4	4	5	4	3	4	3	4	3	5	4	4	50

Maximale score wordt alleen toegekend aan helder gemotiveerde en correcte antwoorden. Het cijfer wordt bepaald als $\frac{1}{5}$ score. Uitwerkingen staan na afloop van het tentamen op Blackboard. De uitslag is uiterlijk bekend op **17 november 2008**. Voor inzage van het beoordeelde werk dien je een afspraak te maken (mkoster@uva.nl). Succes!

Opgave 1

Gegeven is de functie f door $f(x) = \frac{1}{1+x}$ en zij $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ de rij gedefinieerd door

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = f(a_n) \quad \text{voor } n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

- 3 (a) Bewijs dat de rijen $\{a_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ en $\{a_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ monotoon zijn, maar $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ niet.
- 4 (b) Laat zien dat $\{a_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ begrensd is. Concludeer dat $\{a_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ convergent is, en bepaal de limiet L .
- (c) Toon aan dat $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ convergent is, met limiet L .

Opgave 2

Gegeven is de functie q als machtreeks $q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n$.

- (a) Vind straal en het interval van convergentie van deze reeks.
- (b) Bepaal een gesloten formule voor q door de reeks te vergelijken met bekende machtreeksen – via differentiatie en/of integratie.

Zie ommezijde!!

$$\frac{1}{1+x^2}$$

$$\sqrt{x} =$$

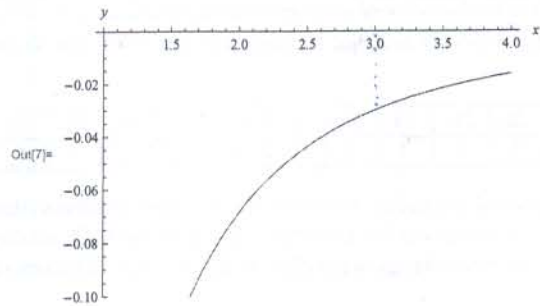
Opgave 3

Gegeven zijn de functie g door $g(x) = \arctan \sqrt{x}$ en de volgende output, gegenereerd met behulp van *Mathematica*:

```

In[7]:= Plot[D[ArcTan[Sqrt[y]], {y, 2}] /. (y -> x),
           {x, 1, 4}, PlotRange -> {-0.1, 0}, AxesLabel -> {x, y}]

```



- Bepaal de lineaire benadering van g in $a = 3$. Benader hiermee $g(4) = \arctan(2)$.
- Formuleer de Stelling van Taylor (met *restafschatting*).
- Geef met behulp van deze stelling aan hoe groot de maximaal gemaakte fout in de benadering in onderdeel (a) is.

Opgave 4

- Geef de McLaurinreeks voor de functie $x \mapsto \cos x$. Bepaal hiermee $\cos(1)$ tot op 0.01 nauwkeurig.

Zij p een functie waarvoor $p(x) = x + x^2 + \mathcal{O}(x^3)$, voor $x \rightarrow 0$.

- Laat zien dat $p(x) - x = o(x)$ voor $x \rightarrow 0$.
- Bepaal

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(p(x)) - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^3}$$

Opgave 5

Gegeven is de functie $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ door $w(x, y) = x^3 + 4y^2$.

- Bepaal zowel de lineaire als ook de kwadratische benadering van w in $(x_0, y_0) = (1, 1)$.
- Bespreek aan de hand van de Hessiaan $Hw(x, y)$ de kwaliteit van de lineaire benadering als benadering voor $w(x, y)$ op het cirkelsegment om $(1, 1)$ met straal 1.