

Tentamen Wiskunde IVAEO, 07-06-2004, Algebra

Opgave 1

- a. Bepaal de eigenwaarden en de eigenruimten van

$$A = \begin{pmatrix} k & 5 \\ 1 & k \end{pmatrix}, \text{ met } k \in \mathbb{N}.$$

- b. Beschouw het lineair dynamisch systeem $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ dat voldoet aan

$$\vec{v}(t+1) = A\vec{v}(t) \text{ en } \vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \text{ Geef een formule voor } \vec{v}(t), t \in \mathbb{N}.$$

- c. Hoe kan je $\sqrt{5}$ m.b.v. $\vec{v}(t)$ benaderen? Wat is de beste keuze van $k \in \mathbb{N}$?
Bonus: neem $t = 6$, kan je schatten hoe goed deze benadering is?

Oplossing

- a. $\lambda_1 = k + \sqrt{5}$, met $E_1 = t \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = k - \sqrt{5}$, met $E_2 = t \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$.

- b. $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A^t \vec{v}(0)$, met $\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (k + \sqrt{5})^t \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} + (k - \sqrt{5})^t \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- c. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t)}{y(t)} = \sqrt{5}$ of $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t+1)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t+1)}{y(t)} = k + \sqrt{5}$.

De snelste convergentie treedt op voor $k \in \mathbb{N}$ waarbij de waarde van

$$\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| = \left| \frac{k - \sqrt{5}}{k + \sqrt{5}} \right| \text{ minimaal is, dus bij } k = 2.$$

Bonus $\left| \frac{x(t)}{y(t)} - \sqrt{5} \right| = \frac{|2\sqrt{5}(k - \sqrt{5})^t|}{(k + \sqrt{5})^t + (k - \sqrt{5})^t} < \frac{5|(k - \sqrt{5})^t|}{(k + \sqrt{5})^t}$

Voor $k = 2$, geldt $|2 - \sqrt{5}| < 0,3$ en $2 + \sqrt{5} > 4$, zo dat voor $t = 6$,

$$\left| \frac{x(6)}{y(6)} - \sqrt{5} \right| < \frac{5|(2 - \sqrt{5})^6|}{(2 + \sqrt{5})^6} < 5 \left(\frac{3}{4} \right)^6 10^{-6} < \frac{5 * 800}{4000} 10^{-6} = 10^{-6}.$$

Opgave 2 Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Bepaal de eigenwaarden van A door 'goed' naar de matrix te kijken en de stellingen over de eigenwaarden te gebruiken. Als het niet wil lukken, gebruik dan maar de karakteristieke polynoom van A .
- Beredeneer uit **a.** dat A gediagonaliseerd kan worden. Bereken A^{100} .
Het kan heel snel en zonder gebruik van de eigenvectoren van A . Hoe?

Oplossing

- De derde kolom van A is \vec{e}_3 , zo dat $A \vec{e}_3 = \vec{e}_3$. Dus is \vec{e}_3 een eigenvector van A bij de eigenwaarde $\lambda_1 = 1$.
- De tweede rij van A is een veelvoud van de eerste rij, zodat $\det(A) = 0$ en $\lambda_2 = 0$ is een eigenwaarde van A .
- $\text{tr}(A) = 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$. Hieruit volgt $\lambda_3 = -1$.

A kan gediagonaliseerd worden omdat ze drie verschillende eigenwaarden heeft, zodat zowel de algebraïsche als de meetkundige multipliciteit van alle eigenwaarden 1 is. Zij S een inverteerbare matrix met als kolommen eigenvectoren $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ behorende bij de eigenwaarden $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ van A . Dan geldt

$$A = S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} S^{-1} \text{ en } A^{100} = S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1} = A^2.$$

Opgave 3 V is een vlak in \mathbb{R}^3 . Beschouw de volgende lineaire transformaties in \mathbb{R}^3 .
 P is een projectie op V , R is de draaiing om de as V^\perp over de hoek $\frac{2\pi}{3}$.
Bepaal het spoor en de determinant van P en R .

Oplossing

- $P(\vec{v}) = \vec{v}$ voor $\vec{v} \in V$, zo dat $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, met de eigenruimte $E_1 = V$, is een eigenwaarde van P met de multipliciteit 2. $\dim \ker(P) = 3 - 2 = 1$, zo dat $\lambda_3 = 0$. Voor een loodrechte projectie geldt dat $E_0 = V^\perp$.
 $\text{tr}(P) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + 1 + 0 = 2$, $\det(P) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 0$.
- $R(\vec{u}) = \vec{u}$ voor $\vec{u} \in V^\perp$, zo dat $\lambda_1 = 1$, met de eigenruimte $E_1 = V^\perp$, is een eigenwaarde van A met de multipliciteit 1. Het vlak V wordt opgespannen door de reële en imaginaire deel van de complexe eigenwaarden van een draaiing over de hoek $\frac{2\pi}{3}$, te weten $\lambda_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ en $\lambda_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
 $\text{tr}(R) = 1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$,
 $\det(R) = 1 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1$.

Opgave 4 A is een *scheef-symmetrische* matrix, d.w.z. $A^T = -A$.

- a. Bewijs dat A^2 symmetrisch is en negatief semi-definiet.
- b. Wat kan je zeggen over de eigenwaarden van A^2 en die van A .

Oplossing

- $(A^2)^T = (A^T)^2 = (-A)^2 = (-1)^2 A^2 = A^2$.
- $\vec{x} \cdot A^2 \vec{x} = \vec{x}^T A A \vec{x} = (A^T \vec{x})^T (A \vec{x}) = (-A \vec{x})^T (A \vec{x}) = -(A \vec{x}) \cdot (A \vec{x}) \leq 0$.
- De eigenwaarden van A^2 zijn reëel en niet positief.
- De eigenwaarden van A zijn imaginair en mogelijk 0.
In het geval dat n oneven is, heeft A zeker een eigenwaarde 0.

Opgave 5 Zij z een complex getal met $|z| = 1$ en $\arg(z) = \theta$.

- a. Geef twee uitdrukkingen voor z^3 : (i) m.b.v. het binomium van Newton en (ii) m.b.v. de formule van de Moivre.
- b. Vergelijk deze twee formules met elkaar en bepaal daarmee $\cos 3\theta$ in termen van de machten van $\cos \theta$.

Oplossing

- a. $z = \cos \theta + i \sin \theta$, vanwege $|z| = 1$ en
 - $z^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$ (de Moivre), als ook
 - $z^3 = \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta$ (Newton).
- b. Het reële deel van beide formules moet hetzelfde zijn, zo dat
$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta) \\ &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta. \end{aligned}$$