Tentamen Wiskunde IV AEO, 7 juni 2004 – onderdeel Calculus
Het maximale aantal te behalen punten is 50. Ieder onderdeel van een opgave is 5 punten waard, tenzij anders aangegeven. De uitwerkingen van het tentamen zijn direct na het tentamen op Blackboard te raadplegen. Inzage van het geleverde werk kan op afspraak geschieden.

Opgave 1 Gegeven is de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ door het voorschrift

$$f(x, y) = (y^2 - x)(y^2 + x - 1).$$

(a) Bepaal de eerste en tweede orde afgeleiden van f.

(b) Bepaal het raakvlak aan de grafiek van f in het punt $(1, 1, 0)$.

(c) Bepaal lokatie, aard en bijbehorende functiewaarde van de eventuele kritieke punten van f. Let hierbij ook op het verschil tussen lokale en globale extrema.

(d) Gegeven is de afbeelding $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$g(t) = (x(t), y(t)).$$

Verder geldt dat $g(1) = (1, 1)$ en $g'(1) = (x'(t), y'(t)) = (1, 2)$. Bepaal $(f \circ g)'(1)$.

Opgave 2 (10 punten)
Optimaliseer

$$F(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

onder de voorwaarde dat $G(x, y) = x^2 + y^2 = 8$ en $x, y > 0$. (Hint: wat gebeurt er als $x \to 0$ of $y \to 0$?)

Opgave 3 Gegeven is het gebied

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + xy + y^2 \leq 1\right\}.$$

(a) Gegeven is de afbeelding $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ door

$$g(u, v) = \left(\frac{u}{\sqrt{3}} - v, \frac{u}{\sqrt{3}} + v\right).$$

Laat zien dat $g(u, v)$ op de rand van E ligt als maar $u^2 + v^2 = 1$. Hoe zou je kunnen laten zien dat het beeld van de eenheidscirkel precies gelijk is aan de rand van E?

(b) Gegeven is de functie $k : E \to \mathbb{R}$ door $k(x, y) = xy$. Neem aan dat $g(C) = E$ waarbij $C = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, u^2 + v^2 \leq 1\}$ en dat g aan alle eisen voor een coördinatentransformatie voldoet als in de *transformatiestelling*. Gebruik deze stelling om de dubbelintegraal

$$I = \int_E k(x, y)\, \mathrm{d}A$$

terug te brengen tot een dubbelintegraal over de cirkel C. Wat zijn deze eisen waaraan g moet voldoen?

(c) (10 punten) Bereken de waarde van I met gebruikmaking van onderdeel (b) in combinatie met poolcoördinaten.

Uitwerkingen

Uitwerking opgave 1

(a)

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= -(y^2+x-1)+(y^2-x) = 1-2x\\
f_y(x,y) &= 2y(y^2+x-1)+2y(y^2-x) = 2y(2y^2-1)\\
f_{xx}(x,y) &= -2\\
f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = 0\\
f_{yy}(x,y) &= 8y^2+2(-x+y^2)+2(-1+x+y^2).
\end{aligned}$$

(b) De gradiënt van f in $(1,1)$ is gelijk aan

$$\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Het raakvlak aan de grafiek van f is het raakvlak aan het niveau-oppervlak van de functie $F(x,y,z) = f(x,y) - z$ bij niveau 0. Dan wordt het vlak gegeven door alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ waarvoor

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \nabla F(1,1,0) = 0,$$

oftewel

$$(x-1)\cdot -1 + (y-1)\cdot 2 + (z-0)\cdot -1 = 0 \leftrightarrow 1 = -x+2y-z.$$

(d) Allereerst bepalen we de stationaire punten:

$$\left\{\begin{array}{l} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1-2x=0 \\ 2y(2y^2-1)=0 \end{array}\right. \leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ y=0 \text{ of } y=\frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ of } y=-\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Dus er zijn drie stationaire punten $(\frac{1}{2},0), (\frac{1}{2},\frac{1}{2}\sqrt{2}), (\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\sqrt{2})$. De bijbehorende Hessianen worden gegeven door

$$Hf(\tfrac{1}{2},0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, Hf(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) = Hf(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt dat $(\frac{1}{2},0)$ een maximum is. Het maximum is lokaal aangezien $\lim_{y\to\infty} f(x,y) = \infty$ voor iedere x. De andere twee stationaire punten zijn zadelpunten aangezien $\det Hf < 0$.

(e) Gebruik hier de kettingregel

$$(f\circ g)'(1) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(1))\cdot x'(1) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(1))\cdot y'(1) = -1\cdot 1 + 2\cdot 2 = 3.$$

Uitwerking opgave 2 Hier gebruiken we de techniek van Lagrange. Merk allereerst op dat het definitiegebied van F bestaat uit het 1e kwadrant met uitzondering van de x-as en y-as. Uit $\nabla G(x,y) = 0$ volgt dat $(x,y) = (0,0)$ en dus volgt uit de stelling van Lagrange dat in een optimum moet gelden dat

$$\nabla F = \lambda \nabla G \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\frac{y}{x^2}+\frac{1}{y} = \lambda 2x \\ \frac{1}{x}-\frac{x}{y^2} = \lambda 2y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\frac{y^2}{x^2}+1 = \lambda 2xy \\ 1-\frac{x^2}{y^2} = \lambda 2xy \end{array}\right.$$

Dan volgt uit de laatste twee vergelijkingen dat $x^4 = y^4$ en dat dus $x = y$ of $x = -y$. Uit de voorwaarde dat $x, y > 0$ volgt dan dat $x = y$. Verder geeft de nevenrestrictie $2x^2 = 8$. Dus vinden we een unieke oplossing $(x, y) = (2, 2)$. Dit punt geeft een absoluut minimum.

Uitwerking opgave 3

(a) Schrijf g uit in de componenten

$$\begin{aligned} g_1(u,v) &= \tfrac{1}{3}\sqrt{3}u - v \\ g_2(u,v) &= \tfrac{1}{3}\sqrt{3}u + v \end{aligned}$$

Stel dat $u^2 + v^2 = 1$. Dan

$$\begin{aligned} (g_1(u,v))^2 + g_1(u,v)g_2(u,v) + (g_2(u,v))^2 &= (\tfrac{1}{3}\sqrt{3}u - v)^2 + (\tfrac{1}{3}\sqrt{3}u - v)(\tfrac{1}{3}\sqrt{3}u + v) + (\tfrac{1}{3}\sqrt{3}u + v)^2 \\ &= u^2 + v^2 = 1. \end{aligned}$$

Dit laat zien dat $g(u,v) \in \{(x,y) \mid x^2 + xy + y^2 = 1\}$. Dat het beeld van de eenheidscirkel precies gelijk is aan E kunnen we laten zien door op te merken dat g een inverteerbare lineaire transformatie is en hiermee het omgekeerde te laten zien dat de inverse ieder element van de eenheidscirkel op de rand van E afbeeldt. Ietwat precieser, al hoort dat niet tot het gevraagde, de inverse wordt gegeven door

$$g^{-1}(x,y) = (\tfrac{1}{2}\sqrt{3}(x+y), \tfrac{1}{2}(y-x)).$$

Neem nu (x,y) waarvoor $x^2 + xy + y^2 = r$, dan

$$(g_1^{-1}(x,y))^2 + (g_2^{-1}(x,y))^2 = (\tfrac{1}{2}\sqrt{3}(x+y))^2 + (\tfrac{1}{2}(y-x))^2 = x^2 + xy + y^2 = r.$$

Dat wil zeggen dat iedere ellips $E(r)$ wordt afgebeeld op de cirkel met straal r. En andersom komt iedere cirkel met straal r op $E(r)$ terecht via g. Dus $g(C) = E$, hetgeen we mochten aannemen in volgende onderdeel.

(b) De Jacobi matrix van g wordt gegeven door de rijen met partiële afgeleiden van de componenten g_1 en g_2:

$$Dg(u,v) = \begin{pmatrix} D_u g_1(u,v) & D_v g_1(u,v) \\ D_u g_2(u,v) & D_v g_2(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{3} & -1 \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Dan volgt met de transformatiestelling

$$\begin{aligned} \int_E xy \, \mathrm{d}A &= \int_{g(C)} k(x,y)\, \mathrm{d}A = \int_C k(g_1(u,v), g_2(u,v))\, |\det Dg(u,v)|\, \mathrm{d}A \\ &= \int_C (\tfrac{1}{3}\sqrt{3}u - v)(\tfrac{1}{3}\sqrt{3}u + v) \cdot \tfrac{2}{3}\sqrt{3}\, \mathrm{d}A = \tfrac{2}{3}\sqrt{3} \int_C \tfrac{1}{3}u^2 - v^2 \, \mathrm{d}A. \end{aligned}$$

(c) Met de overgang op poolcoördinaten vinden we

$$
\begin{aligned}
\int_C \tfrac{1}{3}u^2 - v^2 \; \mathrm{d}A &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\tfrac{1}{3}r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi) r \; \mathrm{d}\varphi \; \mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\tfrac{1}{3}r^3\cos^2\varphi + \tfrac{1}{3}r^3\sin^2\varphi) - \tfrac{4}{3}r^3\sin^2\varphi \; \mathrm{d}\varphi \; \mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{3}r^3(1 - 4\sin^2\varphi) \; \mathrm{d}\varphi \; \mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{3}r^3(1 - (2 - 2\cos 2\varphi) \; \mathrm{d}\varphi \; \mathrm{d}r \;=\; \int_0^1 \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{3}r^3 \left[-\varphi + 2\sin 2\varphi\right]_0^{2\pi} \; \mathrm{d}\varphi \; \mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 -\frac{2}{3}\pi r^3 \; \mathrm{d}r \;=\; \left[-\frac{1}{6}\pi r^4\right]_0^1 \;=\; -\frac{1}{6}\pi.
\end{aligned}
$$

En dus luidt deoplossing $-\frac{1}{9}\sqrt{3}\pi$.