



[Tijdens het tentamen mag de uitgereikte/gedownloade formulesyllabus worden gebruikt.]

Een verzekeraar sluit slechts verzekeringen af overeenkomstig het in het leerboek omschreven contractuele overrentedelingsstelsel. De verzekeringen zijn dus beperkt tot winstdelende gemengde verzekeringen, die alle tegen jaarlijkse prenumerando gelijkblijvende premiebetaling worden afgesloten. Royement, conversie en verwachte mutatie wordt geacht niet voor te komen.

Voor iedere verzekering  $v$  wordt een netto voorziening berekend, die gelijk aan de voorziening  $vV_s(t)$  voor een met de gemengde verzekering corresponderende zuivere spaarverzekering met een jaarlijks gelijk spaarbedrag. Voor een verzekering met duur  $n$  en verzekerd kapitaal  $vK$  hebben we dus als spaarpremie

$$vps = vK A_{\overline{n}|} / \ddot{a}_{\overline{n}|} = vK / \ddot{s}_{\overline{n}|}$$

We gaan uit van een rekenrente  $r$ , dus  $\delta = \ln(1+r)$ . Verder leggen we vast  $dvPS(t) = vps d[t - vt_i]$ , dan geldt voor  $t \geq vt_i$

$$dvV_s(t) = \delta vV_s(t) dt + dvPS(t) - dvU(t); \quad [1]$$

voor  $t \leq vt_e$  leidt dit tot

$$vV_s(t) = \int_{vt_i}^t e^{\delta(t-s)} dvPS(s).$$

In verband met de winstanalyse wordt [1] voor willekeurige  $t$  herschreven als

$$dvV_s(t) = dvPI(t) - dvPR(t) + dvPB(t) - dvU(t) - dvO^\beta(t).$$

[Hierbij te bedenken dat  $dvPI(t) = \delta vV_s(t) dt$  en  $dvPS(t) = dvPB(t) - dvO^\beta(t) - dvPR(t)$ ; de discontinuïteiten van de functies  $vPS(t)$ ,  $vPR(t)$ ,  $vO^\beta(t)$  vallen alle samen met die van de functie  $vPB(t)$ ; de uitkering bij leven geschiedt in  $[vt_e, vt_e+0)$ ; verder  $vV_s(vt_i) = 0$ , tevens  $dvO^\alpha(t) \equiv 0$ .]

Het overrente-aandeel  $vOA(t)$  wordt voor  $vt_i \leq t \leq vt_e$  vastgelegd door

$$vOA(t) = v\overline{SC}(t) - vV_s(t),$$

waarin de grootte  $v\overline{SC}(t)$  de totale waarde van de spaarcertificaten voor post  $v$  voorstelt

$$v\overline{SC}(t) = \sum_{t_k = \max(t_p, t_p - 5)}^{t_p} vSC(t_k, t);$$

voor nadere details zie Hoofdstuk 8 van uw formulesyllabus.

Het overrente-aandeel  $vOA(t)$  is te vergelijken met het winstfonds  $vWF(t)$  uit het boek.

De uitkeringsfunctie bij overlijden is  $vu^o(t)$  en de functie voor de winstuitkering bij overlijden  $vWu^o(t) = veu^o(t)$ , waarbij de laatste functie voor  $vt_p \leq t < vt_p+1$  wordt vastgelegd door

$$veu^o(t) = vOA(vt_p) (1+r)^{vt_e - vt_p}.$$

De uitkeringsfuncties bij in leven zijn  $vU(t)$  en  $vWU(t)$ ; deze laatste functie wordt vastgelegd als tredefunctie met een discontinuïteit gelijk aan het overrente-aandeel  $vOA(vt_e)$  over  $[vt_e, vt_e+0)$ ; bij afkoop worden de betreffende uitkeringsfuncties vastgelegd door  $vu^{af}(t)$  en  $vWu^{af}(t)$ .

De gezamenlijke activa op tijdstip  $t$  worden weer vastgelegd door  $\overline{BE}(t)$  en de decresfunctie  $D(t)$  door

$$\frac{dD(t)}{D(t^+)} = - \frac{dI(t)}{\overline{BE}(t^-)}.$$

Overige onderstellingen als in het leerboek. De gehele opzet van het vraagstuk lijkt sterk op die van het contributiesysteem.

- Schrijf de balansvergelijking op voor de verzekeraar met de gebruikelijke actiefposten; aan de passiefkant het eigen vermogen op te nemen en verder beide posten  $\overline{VS}(t)$  en  $\overline{VOA}(t)$ . De post geaccumuleerde winst lopend boekjaar wordt geacht te zijn opgenomen onder het eigen vermogen.
- Laat uitgaande van de balansvergelijking uit a. zien dat de winst van de verzekeraar (toename eigen vermogen) gelijk is aan

$$dE(t) = dI(t) + dS(t) - d\overline{VS}(t) - d\overline{VOA}(t). \quad [2]$$

Dit is dus de winst ná winstdeling, echter zonder winstanalyse.

- Geef afzonderlijke formules in differentiaalvorm voor  $dI(t)$  en  $dS(t)$ . Voor  $dI(t)$  gaat het om de splitsing van de intrest over het eigen vermogen en gezamenlijk de voorziening voor de zuivere spaarcontracten en de overrente-aandelen. In  $dS(t)$  nu ook de winstuitkeringen op te nemen.
- Bepaal  $d\overline{VS}(t)$  op basis van het voorafgaande, naar analogie van de wijziging van de totale voorziening over  $[t, t+dt]$  uit het boek.
- In het boek is de wijziging van het overrente-aandeel over een *boekjaar* gegeven. Voor een interval  $[t, t+dt]$  kunnen we voor post  $v$  schrijven

$$dvOA(t) = dv\overline{ISC}(t) - dvPI(t),$$

waarin  $dv\overline{ISC}(t)$  voorstelt de totale door de verzekeraar vergoede infinitesimale intrest over de voor verzekering  $v$  op  $t$  bestaande spaarcertificaten.

Geef een wiskundige formule voor  $dv\overline{ISC}(t)$ .

- Bepaal vervolgens  $d\overline{VOA}(t)$  naar analogie van de bepaling van  $d\overline{VS}(t)$  uit onderdeel d.

- g. Bepaal de winst ná winstdeling voor de verzekeraar na winstanalyse over  $[t, t+dt]$  door substitutie van uw antwoorden voor  $dI(t)$ ,  $dS(t)$ ,  $d\bar{V}_s(t)$  en  $d\bar{V}_{OA}(t)$  in [2]. Overeenkomstige termen te schrappen, bij elkaar horende termen naast elkaar op te nemen.
- h. De winst vóór winstdeling voor de verzekeraar over  $[t, t+dt]$  is gelijk aan

$$dE(t) + \bar{v}dOA(t) + [Wud\bar{v}_o(t) - OAd\bar{v}_o(t) + Wud\bar{v}_{af}(t) - OAd\bar{v}_{af}(t)]. \quad [3]$$

Constateer dat dan onmiddellijk volgt

$$\begin{aligned} & dE(t) + \bar{v}dOA(t) + [Wud\bar{v}_o(t) - OAd\bar{v}_o(t) + Wud\bar{v}_{af}(t) - OAd\bar{v}_{af}(t)] \\ &= dE(t) + d\bar{V}_{OA}(t) + [Wud\bar{v}_o(t) + Wud\bar{v}_{af}(t) + \bar{v}dWU(t)]. \end{aligned} \quad [4]$$

Demonstreer wiskundig dat op grond van g. de winst vóór winstdeling over  $[t, t+dt]$  dan gelijk is aan de som van de intrest-, sterfte-, afkoop- en kostenwinst over  $[t, t+dt]$  (alles exclusief winstdeling). Uw formule aan te duiden met [5].

- i. [extra, geen verplicht onderdeel van het tentamen; het maximaal te behalen cijfer blijft een 10.]  
Voor het contractuele overrentedelingsstelsel kan op contractniveau voor post  $v$  een accresfunctie  $vA(t)$  worden gedefinieerd, zodanig dat geldt voor  $a \leq vt_i \leq t < vt_e$

$$v\bar{S}C(t) = v\bar{S}C(a) \frac{vA(t)}{vA(a)} + \int_a^t \frac{vA(s)}{vA(s^+)} dvPS(s).$$

Hoe moet  $vA(t)$  dan worden gedefinieerd?

Bepaal tevens de intrestwinst voor de verzekeraar voor post  $v$  over  $[t, t+dt]$ .

### Cijfermatig deel

We beschouwen een verzekeraar, zoals hiervoor omschreven, over het kalenderjaar  $[j-1, j]$ , waarbij aanvullende cijfermatige gegevens worden verstrekt. Enkele onderstellingen worden aangepast, zie hierna. De balans is op 1 januari van het jaar  $[j-1, j]$  als volgt samengesteld:

<b>Activa</b>		<b>Passiva</b>	
$BE(j-1)$	= 20.700.000	$\bar{V}_s(j-1)$	= 17.000.000
$LI(j-1)$	= 500.000	$\bar{V}_{OA}(j-1)$	= 2.500.000
$RC(j-1)$	= --	$E(j-1)$	= 1.700.000
totaal	= 21.200.000	totaal	= 21.200.000

#### Beleggingsportefeuille:

De beleggingen bestaan op 1 januari van het jaar  $[j-1, j]$  uit obligaties, nominale waarde 20.000.000, met een intrest van 7% per jaar, jaarlijks uit te keren op 1 juli. De balanswaarde van de beleggingen is gelijk aan de nominale waarde, vermeerderd met de nog te vorderen intrest, die evenredig met de tijd wordt berekend. Op 1 juli wordt voor 1.500.000 nieuwe obligaties gekocht (dit bedrag is dan nog exclusief de

bij te betalen te vorderen intrest). Deze obligaties hebben coupondata 1 april en 1 oktober en een nominale intrest van 6%. Op 1 oktober wordt eveneens 1.500.000 belegd in nieuwe 6% obligaties met coupondata 1 april en 1 oktober. De kosten van administratie en beheer van de beleggingen worden ondersteld nihil te zijn.

*Verzekeringssportefeuille:*

Alle verzekeringen zijn gesloten tegen jaarpremie met vervaldag 1 mei of 1 oktober. Op 1 januari van het jaar  $[j-1, j]$  bedraagt de stand van de bruto jaarpremie met vervaldag 1 mei 1.000.000 en de stand van de bruto jaarpremie met vervaldag 1 oktober eveneens 1.000.000.

Op 1 september worden enige verzekeringen beëindigd met de volgende uitkeringen:

uitkering wegens expiratie:	verzekerd kapitaal	300.000
	overrente-aandeel	60.000
uitkering wegens overlijden:	verzekerd kapitaal	150.000 (voorziening 75.000)
	winstuitkering	15.000 (overrente-aandeel 13.000)

De vervaldag van de jaarpremie voor beide beëindigde verzekeringen is 1 mei, zodat de premie in het jaar  $[j-1, j]$  nog betaald is.

Voorts gaan op 1 oktober nieuwe verzekeringen in met een totale bruto jaarpremie van 200.000 die voor het eerst verschuldigd is op 1 oktober van het jaar  $[j-1, j]$ , waardoor de totale op 1 oktober te ontvangen bruto premie 1.200.000 bedraagt.

De in het jaar  $[j-1, j]$  gemaakte kosten bedragen 300.000.

De voorziening verzekeringsverplichtingen op 31 december van het jaar  $[j-1, j]$  bedraagt 19.500.000 (afgerond bedrag) en is gelijk aan de opgerente waarde van de spaarpremies. De netto jaarpremie bedraagt 90% van de bruto jaarpremie. De voorziening is berekend met een rekenrente van 4% per jaar.

Vragen:

- j. 1) Bereken de gecumuleerde kasstroom  $\int_{j-1}^j dS(t)$  die in het jaar beschikbaar komt uit de verzekeringen.
- 2) Bereken de in het jaar ontvangen kasstroom  $\int_{j-1}^j dBLI(t)$  uit de beleggingen.
- 3) Bereken de balanswaarde van de beleggingen op 31 december van het jaar, inclusief de te vorderen intrest.
- 4) Bereken de beleggingsopbrengst over het jaar:  $\int_{j-1}^j dI(t)$ .
- 5) Het saldo van het Rekening Courantboek bedraagt op 31 december  $RC(j) = 0$ . Bereken het saldo van de liquiditeitenrekening.



## Uitwerking tentamen Leven Bedrijfsanalyse en Embedded Value d.d. 25 januari 2005

a. De balansvergelijking is

$$LI(t) + BE(t) + RC(t) = E(t) + \bar{v}Vs(t) + \bar{v}OA(t).$$

b. Optelling van de 3 formules

$$dLI(t) = dSLI(t) + dBLI(t) \quad (\text{zie (2.29)})$$

$$dBE(t) = dI(t) - dBLI(t) \quad (\text{zie (2.26)})$$

$$dRC(t) = dS(t) - dSLI(t) \quad (\text{zie (2.28)})$$

levert

$$d[LI(t) + BE(t) + RC(t)] = dI(t) + dS(t). \quad (3.3)$$

zodat met behulp van a. resulteert

$$dE(t) = dI(t) + dS(t) - d\bar{v}Vs(t) - d\bar{v}OA(t). \quad [2]$$

c.

$$\begin{aligned} dI(t) &= -\bar{\bar{B}}\bar{E}(t^-) \frac{dD(t)}{D(t^+)} \\ &= -[\bar{v}Vs(t^-) + \bar{v}OA(t^-) + E(t^-)] \frac{dD(t)}{D(t^+)}, \end{aligned}$$

leidend tot

$$dIE(t) = -E(t^-) \frac{dD(t)}{D(t^+)}$$

en

$$\bar{v}dI(t) = -[\bar{v}Vs(t^-) + \bar{v}OA(t^-)] \frac{dD(t)}{D(t^+)}.$$

Verder is

$$dS(t) = \bar{v}dPB(t) - dO'(t) - \bar{v}dU(t) - \bar{v}dWU(t) - u(d\bar{v}_o + d\bar{v}_{af})(t) - Wu(d\bar{v}_o + d\bar{v}_{af})(t).$$

d.  $d\bar{v}Vs(t)$

$$= \bar{v}dVs(t) + Vsd\bar{v}(t)$$

$$= \bar{v}dPI(t) - \bar{v}dPR(t) + \bar{v}dPB(t) - \bar{v}dU(t) - \bar{v}dO^B(t) - Vsd[\bar{v}_o(t) + \bar{v}_{af}(t)],$$

omdat  $Vsd\bar{v}_i(t) = Vsd\bar{v}_{ae}(t) = 0$ .

e.

$$dv\bar{I}SC(t) = \sum_{t_k = \max(t_i, |t| - 5)}^{|t|} \delta(t_k) vSC(t_k, t) dt, \text{ met } \delta(t_p) = \ln(1 + ur(t_p)).$$

f. 
$$\begin{aligned} & \bar{d}vOA(t) \\ &= \bar{v}dOA(t) + OAd\bar{v}(t) \\ &= \bar{v}d\overline{ISC}(t) - \bar{v}dPI(t) - \bar{v}dWU(t) - OAd[\bar{v}_o(t) + \bar{v}_{af}(t)]. \end{aligned}$$

g. Winst ná winstdeeling, na winstanalyse:

$$\begin{aligned} & dE(t) \\ &= dIE(t) + \bar{v}dI(t) \\ & \quad + \bar{v}dPB(t) - dO'(t) - \bar{v}dU(t) - \bar{v}dWU(t) - u(d\bar{v}_o + d\bar{v}_{af})(t) - Wu(d\bar{v}_o + d\bar{v}_{af})(t) \\ & \quad - [\bar{v}dPI(t) - \bar{v}dPR(t) + \bar{v}dPB(t) - \bar{v}dU(t) - \bar{v}dO^B(t) - Vsd[\bar{v}_o(t) + \bar{v}_{af}(t)]] \\ & \quad - [\bar{v}d\overline{ISC}(t) - \bar{v}dPI(t) - \bar{v}dWU(t) - OAd[\bar{v}_o(t) + \bar{v}_{af}(t)]] \\ &= dIE(t) \\ & \quad + \bar{v}dI(t) - \bar{v}d\overline{ISC}(t) \\ & \quad + \bar{v}dPR(t) - ud\bar{v}_o(t) + Vsd\bar{v}_o(t) \\ & \quad + OAd\bar{v}_o(t) - Wud\bar{v}_o(t) \\ & \quad - ud\bar{v}_{af}(t) + Vsd\bar{v}_{af}(t) \\ & \quad + OAd\bar{v}_{af}(t) - Wud\bar{v}_{af}(t) \\ & \quad + \bar{v}dO^B(t) - dO'(t). \end{aligned}$$

h. Uit g. volgt door herschrijven:

$$\begin{aligned} & dE(t) + \bar{v}d\overline{ISC}(t) - \bar{v}dPI(t) + [OAd\bar{v}_o(t) - Wud\bar{v}_o(t) + OAd\bar{v}_{af}(t) - Wud\bar{v}_{af}(t)] \\ &= dIE(t) \\ & \quad + \bar{v}dI(t) - \bar{v}dPI(t) \\ & \quad + \bar{v}dPR(t) - ud\bar{v}_o(t) + Vsd\bar{v}_o(t) \\ & \quad - ud\bar{v}_{af}(t) + Vsd\bar{v}_{af}(t) \\ & \quad + \bar{v}dO^B(t) - dO'(t). \end{aligned}$$

[5]

Het gestelde volgt dan uit [3] en relatie  $\bar{v}dOA(t) = \bar{v}d\overline{ISC}(t) - \bar{v}dPI(t)$ , zie opgave e.

i. We leggen  $v_f(t)$  overeenkomstig (7.9) voor  $t \geq vt_i$  vast door

$$v_f(t) = \int_{vt_i}^t \frac{dv\overline{ISC}(s)}{v\overline{SC}(s^-)} = \int_{vt_i}^t \frac{dvA(s)}{vA(s^-)}$$

met als intrest  $dv\overline{ISC}(s)$  over de vigerende spaarcertificaten als door u vastgelegd in uw uitwerking onder opgave e. Omdat we als startwaarde willen hebben  $vA(vt_i) = 1$  kiezen we  $\overline{vSC}(vt_i) = \overline{vSC}(vt_i+0) = vps$ .

Dit leidt tot een continue functie  $v_f(t)$ , zodat de oplossing van  $vA(t)$  overeenkomstig (7.24) wordt vastgelegd door  $vA(t) = e^{v_f(t)}$ .

De intrestwinst voor post v is over  $[t, t+dt]$  gelijk aan

$$[vV_s(t^-) + vOA(t^-)] \left[ -\frac{dD(t)}{D(t^+)} + \frac{dvD(t)}{vD(t^+)} \right],$$

hierbij is  $vD(t) = 1/vA(t)$ .

j. 1) 
$$\int_{j-1}^j dS(t) = (1.000.000 + 1.200.000) - 300.000 - (300.000 + 60.000) - (150.000 + 15.000) = \mathbf{1.375.000}$$

2) 
$$\int_{j-1}^j dBLI(t) = 7\% \text{ van } 20.000.000 - (1.500.000 + 1,5\% \text{ van } 1.500.000) + 3\% \text{ van } 1.500.000 - 1.500.000 = 1.400.000 - 1.522.500 + 45.000 - 1.500.000 = \mathbf{-1.577.500}$$

3) 
$$BE(j) = 20.000.000 + 1.500.000 + 1.500.000 + 3,5\% \text{ van } 20.000.000 + 1,5\% \text{ van } 3.000.000 = 23.000.000 + 700.000 + 45.000 = \mathbf{23.745.000}$$

4) 
$$\int_{j-1}^j dI(t) = 7\% \text{ van } 20.000.000 + 3\% \text{ van } 1.500.000 + 1,5\% \text{ van } 1.500.000 = 1.400.000 + 45.000 + 22.500 = \mathbf{1.467.500}$$

Controle:

$$\int_{j-1}^j dI(t) + \int_{j-1}^j dBLI(t) = 1.467.500 + 1.577.500 = 3.045.000$$

$$\int_{j-1}^j dBEE(t) = 23.745.000 - 20.700.000 = 3.045.000$$

$$5) \int_{j-1}^j dRC(t) - \int_{j-1}^j dLI(t) = \int_{j-1}^j dS(t) + \int_{j-1}^j dBLI(t)$$

linkerlid:  $LI(j) - LI(j-1) = LI(j) - 500.000$

rechterlid:  $1.375.000 - 1.577.500 = -202.500$

waaruit volgt:  $LI(j) = 500.000 - 202.500 = 297.500$ .

k.	1) <b>Activa</b>		<b>Passiva</b>	
	$BE(j)$	= 23.745.000	$\bar{v}V_s(j)$	= 19.500.000
	$LI(j)$	= 297.500	$\bar{v}OA(j) + E(j)$	= 4.542.500
	$RC(j)$	= --		
	totaal	= 24.042.500	totaal	= 24.042.500

$$2) \int_{j-1}^j [dE(t) + d\bar{v}OA(t)] = 4.542.500 - (1.700.000 + 2.500.000) = 342.500$$

$$\int_{j-1}^j [dI(t) + dS(t) - d\bar{v}V_s(t)] = 1.467.500 + 1.375.000 - (19.500.000 - 17.000.000) = 342.500$$

klopt!

$$3) \int_{j-1}^j [ \{ dE(t) + d\bar{v}OA(t) + [Wud\bar{v}_o(t) + \bar{v}dWU(t) \} ]$$

$$= 342.500 + 75.000 = 417.500.$$

- 1) Winst op kosten:  
 Beschikbaar: 10% bruto premie, dat is  $0,1 * 2.200.000 = 220.000$ .  
 Gemaakte kosten 300.000.  
 Resultaat op kosten:  $220.000 - 300.000 = -80.000$ .

$$2) \text{Kasstroom } dSV(t) = \bar{v}dPB(t) - \bar{v}dU(t) - ud\bar{v}_o(t) - \bar{v}dO^B(t).$$

$$\int_{j-1}^j dSV(t) = 0,9 * 1.000.000 + 0,9 * 1.200.000 - 300.000 - 150.000 = 1.530.000.$$

Oprenting met 4% intrest

$$\int_{j-1}^j 1,04^{j-t} dSV(t)$$

$$= 0,9 * 1.000.000 * 1,02649 + 0,9 * 1.200.000 * 1,00985$$

$$- 300.000 * 1,0316 - 150.000 * 1,0316$$

$$= 1.558.557.$$

$$\int_{j-1}^j 1,04^{j-t} dWSM(t) = 1,04 \bar{v}V_s(j-1) - \bar{v}V_s(j) + \int_{j-1}^j 1,04^{j-t} dSV(t)$$

$$= 1,04 * 17.000.000 - 19.500.000 + 1.558.557$$

$$= -261.443$$

3) De gemaakte intrest is 1.467.500.

De benodigde intrest is

$$0,04 \bar{v}V_s(j-1) + \int_{j-1}^j (1,04^{j-t} - 1) dSV(t)$$

$$= 680.000 + 1.558.557 - 1.530.000 = 708.557.$$

Intrestwinst:  $1.467.500 - 708.557 = 758.943$ .

4) Totaal  $1) + 2) + 3) = -80.000 - 261.443 + 758.943 = 417.500$ , klopt met k3.

m. Intrest over de spaarcertificaten:

$$0,055 * [\bar{v}OA(j-1) + \bar{v}Vs(j-1) + 1.00.000 * 0,8 * 8/12 + 1.200.000 * 0,8 * 3/12 \\ - (300.000 + 75.000 + 60.000 + 13.000) * 4/12] = 1.106.820$$

Dus intrestwinst verzekeraar =  $1.467.500 - 1.106.820 = 360.680$ .

$$\bar{v}OA(j) = \bar{v}OA(j-1) + 1.106.820 - 708.557 - 60.000 - 13.000 = 2.825.263 \text{ (zie f.)}$$

$E(j) = E(j-1) - \text{verlies op kosten} + \text{intrestwinst verzekeraar} - \text{verlies op sterfte}$

$$= 1.700.000 - 80.000 + 360.680 - 261.443 = 1.719.237.$$

$$E(j) + \bar{v}OA(j) = 1.719.237 + 2.825.263 = 4.544.500 \text{ (in balans, zie k1.: 4.542.500).}$$