FACULTEIT DER ECONOMISCHE WETENSCHAPPEN EN ECONOMETRIE
Afdeling Kwantitatieve Economie

Tentamen Markovmodellen in het actuariaat d.d. 20 januari 2005, 14.00-17.00u

Puntenwaardering: ieder der vraagstukken 1, 2 en 3 telt even zwaar.

1. $\ddot{a}_{a,ia}(m, m+n)$ stelt de koopsom voor van een tijdelijke prenumerando verblijfsrente met jaarlijkse betalingen groot 1 op gehele tijdstippen indien het contract in toestand a (= actief) verkeert; de betalingen zijn evenwel niet verplicht gedurende het huidige verblijf in toestand a (m, n geheel). Daarnaast stelt i de toestand arbeidsongeschiktheid voor (er bestaat de mogelijkheid tot reactivering). De niet in het koopsomsymbool opgenomen toestand d stelt voor de toestand verzekerde is overleden.

a. Geef een integraal- of sommatieformule voor deze koopsom.

b. Geef een compleet systeem van éénjarige recursierelaties voor dit contract (dus een recursierelatie voor $\ddot{a}_{a,ia}(\nu, m+n)$ en <u>alle</u> overige renten die in dit stelsel optreden).

c. In dit geval geldt er ook een relatie van het type $A = -d\ddot{a}$ of $A = 1 - d\ddot{a}$. Geef de wiskundige uitdrukking voor de verzekering met koopsom A die aan één van beide relaties voldoet. Een bewijs hiervan hoeft niet te worden geleverd. [Indien u wel een correct bewijs van de relatie levert krijgt u hiervoor 1 punt extra; het maximaal te behalen punten voor het tentamen blijft een 10.]

2. a. Geef een integraalformule voor $(\overline{D}\overline{A})'_{j,kp}(0, n)$, welke grootheid voorstelt de koopsom voor een contract dat op tijdstip 0 wordt afgesloten in toestand j, een duur heeft van n jaar en bij een overgang $k \rightarrow p$ op tijdstip t onmiddellijk een bedrag $n-t$ uitkeert.

b. Gegeven is, dat voor ieder verzekeringsjaar $\nu+1$ geldt $q_{r,jk}(\nu, \nu+\tau) = \tau\, q_{r,jk}(\nu, \nu+1)$, $\tau \in (0, 1]$, $\nu = 0, 1, ..., n-1$. Toon aan dat onder vermelde voorwaarde geldt

$$(\overline{D}\overline{A})'_{j,kp}(0, n) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{r} e^{-\delta(\nu+1)}\, p_{jr}(0, \nu)\, q_{r,kp}(\nu, \nu+1)\, c^{*}_{kp}(\nu+1);$$

bepaal zelf $c^{*}_{kp}(\nu+1)$ en herleid deze tot een eenvoudige uitdrukking, waarin slechts symbolen uit de intrestrekening voorkomen.

3. In een van de practicumopgaven is op basis van de vergelijking in differentiaalvorm van Thiele en keuze van een bepaald uitkeringsschema e.d. de volgende relatie aangetoond:

$$q_{j,kp}(s, t) = \delta_{jk} \int_s^t P_k(s, u)\, \mu_{kp}(u)\, du + \sum_r \int_s^t P_j(s, u)\, q_{r,kp}(u, t)\, \mu_{jr}(u)\, du. \tag{1}$$

a. Toon door substitutie van een overeenkomstige gelijkheid aan dat geldt:

$$\begin{aligned} & q_{j,kp}(s, t) \\ &= \delta_{jk} \int_s^t P_k(s, u)\, \mu_{kp}(u)\, du \\ &\quad + \sum_r \int_s^t P_j(s, u)\, [\delta_{rk} \int_u^t P_k(u, v)\, \mu_{kp}(v)\, dv]\, \mu_{jr}(u)\, du \\ &\quad + \sum_r \int_s^t P_j(s, u)\, [\sum_\ell \int_u^t P_r(u, v)\, q_{\ell,kp}(v, t)\, \mu_{r\ell}(v)\, dv]\, \mu_{jr}(u)\, du. \end{aligned}$$

b. Bij dit onderdeel moet door herleiding worden aangetoond dat

$$\sum_r \int_s^t P_j(s, u)[\delta_{rk} \int_u^t P_k(u, v)\, \mu_{kp}(v)\, dv]\, \mu_{jr}(u)\, du$$

$$= \int_s^t P_{jk}^{(1)}(s, u)\, \mu_{kp}(u)\, du,$$

waarin per definitie

$$P_{jk}^{(1)}(s, u) = \int_s^u P_j(s, v)\, \mu_{jk}(v)\, P_k(v, u)\, dv.$$

Bij het bewijs moet worden gebruikt dat:

$$P_k(u, v) = \exp[-\int_u^v \mu_{kN}(w)\, dw] = \exp[-\int_0^v \mu_{kN}(w)\, dw]\ \exp[\int_0^u \mu_{kN}(w)\, dw]\,.$$

In het bewijs moet eerst geïtereerde en vervolgens partiële integratie worden toegepast. Let goed op dat voldaan is aan de vereisten van het gebruik van de geïtereerde integratiestelling.

Uitwerking tentamen Markovmodellen in het actuariaat d.d. 20 januari 2005

1a $S_a = \ddot{a}_{a,ia}(m, m+n) = \int_m^{m+n} e^{-\delta(t-m)}\,[p_{aa}(m, t) - P_a(m, t)]\, d\lceil t \rceil.$

1b $\ddot{a}_{a,ia}(\nu, m+n) = e^{-\delta}\, P_a(\nu, \nu+1)\, \ddot{a}_{a,ia}(\nu+1, m+n)$

$$+\, e^{-\delta}\, p_{ai}(\nu, \nu+1)\, \ddot{a}_{ia}(\nu+1, m+n)$$

$$+\, e^{-\delta}\, [p_{aa}(\nu, \nu+1) - P_a(\nu, \nu+1)]\, \ddot{a}_{aa}(\nu+1, m+n)$$

$$+\, e^{-\delta}\, p_{ad}(\nu, \nu+1)\, 0.$$

$\ddot{a}_{ia}(\nu, m+n) = e^{-\delta}\, p_{ii}(\nu, \nu+1)\, \ddot{a}_{ia}(\nu+1, m+n) + e^{-\delta}\, p_{ia}(\nu, \nu+1)\, \ddot{a}_{aa}(\nu+1, m+n)$

$\ddot{a}_{aa}(\nu, m+n) = 1 + e^{-\delta}\, p_{aa}(\nu, \nu+1)\, \ddot{a}_{aa}(\nu+1, m+n) + e^{-\delta}\, p_{ai}(\nu, \nu+1)\, \ddot{a}_{ia}(\nu+1, m+n)$

Randvoorwaarden $\ddot{a}_{a,ia}(m+n, m+n) = \ddot{a}_{aa}(m+n, m+n) = \ddot{a}_{ia}(m+n, m+n) = 0.$

1c $-\,d\, \ddot{a}_{a,ia}(m, m+n)$

$= -\,d \int_m^{m+n} e^{-\delta(t-m)}\, [p_{aa}(m, t) - P_a(m, t)]\, d\lceil t \rceil$

$= \int_m^{m+n} [p_{aa}(m, t) - P_a(m, t)]\, de^{-\delta(\lceil t \rceil - m)}$

$= [p_{aa}(m, t) - P_a(m, t)]\, e^{-\delta(\lceil t \rceil - m)}\Big|_m^{m+n}$

$\quad - \int_m^{m+n} e^{-\delta(\lceil t \rceil - m)}\, d[p_{aa}(m, t) - P_a(m, t)]$

$= [p_{aa}(m, m+n) - P_a(m, m+n)]\, e^{-\delta n} - [p_{aa}(m, m) - P_a(m, m)]$

$\quad - \int_m^{m+n} e^{-\delta(\lceil t \rceil - m)}\, d[p_{aa}(m, t) - P_a(m, t)]$

Aangezien $[p_{aa}(m, m) - P_a(m, m)] = 1 - 1 = 0$ geldt de relatie $A = -\,d\, \ddot{a}$.

2a $(D\bar{A})'_{j,kp}(0,n) = \int_0^n e^{-\delta t}\,(n-t)\, p_{jk}(0,t)\,\mu_{kp}(t)\,dt.$

2b $(D\bar{A})'_{j,kp}(0,n)$

$$= \int_0^n e^{-\delta t}\, c_{kp}(t)\, p_{jk}(0,t)\,\mu_{kp}(t)\,dt$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_r e^{-\delta\nu}\, p_{jr}(0,\nu) \int_0^1 e^{-\delta s}\, c_{kp}(\nu+s)\, p_{rk}(\nu,\nu+s)\,\mu_{kp}(\nu+s)\,ds$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_r e^{-\delta\nu}\, p_{jr}(0,\nu) \int_0^1 e^{-\delta s}\, c_{kp}(\nu+s)\, dq_{r,kp}(\nu,\nu+s)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_r e^{-\delta\nu}\, p_{jr}(0,\nu)\, q_{r,kp}(\nu,\nu+1) \int_0^1 e^{-\delta s}\, c_{kp}(\nu+s)\,ds$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_r e^{-\delta(\nu+1)}\, p_{jr}(0,\nu)\, q_{r,kp}(\nu,\nu+1)\, c^*_{kp}(\nu+1)$$

met

$c^*_{kp}(\nu+1)$

$$= \int_0^1 e^{\delta(1-s)}\, c_{kp}(\nu+s)\,ds = \int_0^1 e^{\delta(1-s)}\,[n-(\nu+s)]\,ds$$

$$= [n-\nu]\int_0^1 e^{\delta(1-s)}\,ds \;-\; \int_0^1 e^{\delta(1-s)}\, s\,ds$$

$$= -\,[n-\nu]\int_0^1 de^{\delta(1-s)}/\delta - \int_0^1 e^{\delta(1-s)}\, s\,ds$$

$$= [n-\nu]\; i/\delta - (I\bar{s})_{\bar{1}|}.$$

3a De gelijkheid volgt na substitutie in (1) van

$$q_{r,kp}(u,t) = \delta_{rk} \int_u^t P_k(u,v)\,\mu_{kp}(v)\,dv + \sum_\ell \int_u^t P_r(u,v)\, q_{\ell,kp}(v,t)\,\mu_{r\ell}(v)\,dv.$$

3b $$\sum_r \int_s^t P_j(s,u)\left[\delta_{rk}\int_u^t P_k(u,v)\,\mu_{kp}(v)\,dv\right]\mu_{jr}(u)\,du$$

$$= \int_s^t P_j(s,u)\left[\int_u^t P_k(u,v)\,\mu_{kp}(v)\,dv\right]\mu_{jk}(u)\,du$$

$$= \int_s^t P_j(s,u)\,\exp[\int_0^u \mu_{kN}(w)\,dw]\,\mu_{jk}(u)\left[\int_u^t \exp[-\int_0^v \mu_{kN}(w)\,dw]\,\mu_{kp}(v)\,dv\right]du$$

$$= \int_s^t \left[\int_u^t \exp[-\int_0^v \mu_{kN}(w)\,dw]\,\mu_{kp}(v)\,dv\right] d\left[\int_s^u P_j(s,z)\,\exp[\int_0^z \mu_{kN}(w)\,dw]\,\mu_{jk}(z)\,dz\right]$$

$$= \left[\int_u^t \exp[-\int_0^v \mu_{kN}(w)\,dw]\,\mu_{kp}(v)\,dv\right]\left[\int_s^u P_j(s,z)\,\exp[\int_0^z \mu_{kN}(w)\,dw]\,\mu_{jk}(z)\,dz\right]\Big|_{u=s}^{t}$$

$$-\int_s^t\left[\int_s^u P_j(s,z)\,\exp[\int_0^z \mu_{kN}(w)\,dw]\,\mu_{jk}(z)\,dz\right] d\left[\int_u^t \exp[-\int_0^v \mu_{kN}(w)\,dw]\,\mu_{kp}(v)\,dv\right]$$

$$= 0 + \int_s^t\left[\int_s^u P_j(s,z)\,\exp[\int_0^z \mu_{kN}(w)\,dw]\,\mu_{jk}(z)\,dz\right]\exp[-\int_0^u \mu_{kN}(w)\,dw]\,\mu_{kp}(u)\,du$$

$$= \int_s^t\left[\int_s^u P_j(s,z)\,\exp[-\int_z^u \mu_{kN}(w)\,dw]\,\mu_{jk}(z)\,dz\right]\mu_{kp}(u)\,du$$

$$= \int_s^t\left[\int_s^u P_j(s,z)\,P_k(z,u)\,\mu_{jk}(z)\,dz\right]\mu_{kp}(u)\,du$$

$$= \int_s^t P_{jk}^{(1)}(s,u)\,\mu_{kp}(u)\,du$$

In bovenstaande is gebruikt dat

$$P_k(u,v) = \exp[-\int_u^v \mu_{kN}(w)\,dw] = \exp[-\int_0^v \mu_{kN}(w)\,dw]\,\exp[\int_0^u \mu_{kN}(w)\,dw]$$