FACULTEIT DER ECONOMISCHE WETENSCHAPPEN EN ECONOMETRIE
Afdeling Kwantitatieve Economie

Tentamen Markovmodellen in het actuariaat d.d. 30 maart 2005, 14.00-17.00u

Puntenwaardering: ieder der vraagstukken 1, 2 en 3 telt even zwaar.

1 In Hoofdstuk 2 is de volgende formule voor de voorziening opgesteld voor een contract dat op tijdstip t in toestand j verblijft:

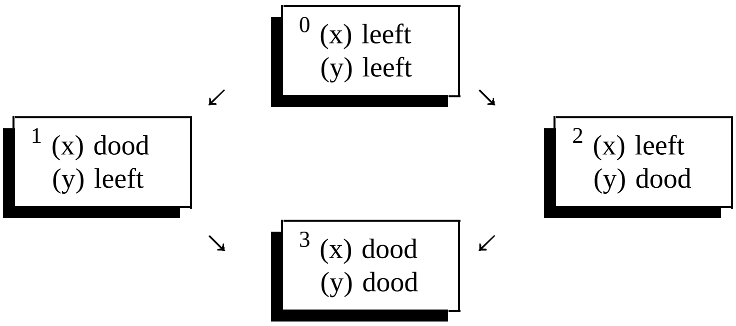
$$V_j(t) = \sum_{\ell,r} \int_t^\infty e^{-\delta(u-t)}\, c_{\ell r}(u)\, dq_{j,\ell r}(t,u) - \sum_r \int_t^\infty e^{-\delta(u-t)}\, p_{jr}(t,u)\, d[\Pi_r(u) - B_r(u)].$$

Toon met behulp van bovenstaande formule de geldigheid aan van de relatie

$$p_{jk}(s,t) = \delta_{jk} + q_{j,Nk}(s,t) - q_{j,kN}(s,t).$$

Aanwijzing: Kies bijpassende betalingsfuncties en rente-intensiteit.

2 Dit vraagstuk betreft het Markovmodel voor het bijzondere geval verzekeringen op twee levens (x) en (y), als afgebeeld in onderstaand diagram.



S is de stochastische toekomstige levensduur van (x) en T de stochastische toekomstige levensduur van (y). De simultane verdelingsfunctie van de levensduurverdelingen S en T wordt vastgelegd door

$$\Pr[S > s, T > t] = p_{00}(0,t) + p_{00}(0,s)\, p_{01}(s,t) \text{ voor } 0 \le s \le t \qquad (1)$$

en de marginale verdelingsfunctie van T is

$$\Pr[T > t] = p_{00}(0,t) + p_{01}(0,t). \qquad (2)$$

a. Beredeneer verbaal de geldigheid van (1) en (2) en geef zelf $\Pr[S > s, T > t]$ voor $s > t \ge 0$ en $\Pr[S > s]$ voor $s \ge 0$.
b. Druk $\Pr[S > s, T > t]$ voor $0 \le s \le t$ uit in de intensiteiten μ; idem $\Pr[T > t]$.
c. Toon voor $0 \le s \le t$ aan dat $\Pr[S > s, T > t] = \Pr[S > s]\Pr[T > t]$ indien $\mu_{01}(u) = \mu_{23}(u)$ en $\mu_{02}(u) = \mu_{13}(u)$ voor iedere $u \ge 0$. (In dit geval is er dus sprake van onafhankelijkheid van S en T.)

3 a. We beschouwen een algemeen Markovmodel als omschreven in het leerboek met evenwel alleen doorgangstoestanden en absorberende toestanden. Gegeven is dat $\overline{B_k}(\cdot) \equiv 0$ voor de absorberende toestanden en tevens dat de uitkeringsfuncties bij overgang separeerbaar. Voor dit geval is in het boek aangetoond dat dan geldt

$$V_j(t) = \sum_k \int_t^\infty e^{-\delta(s-t)} [c_{jk}(s) - \int_t^s e^{\delta(s-v)}\, d\overline{B_k}(v)]\, dp_{jk}(t, s). \qquad [1]$$

Voor iedere k is $\overline{B_k}(\cdot) = B_k(\cdot) - \Pi_k(\cdot)$. Voor de uitkeringsfuncties $c_{jk}(\cdot)$, $\forall j, k$ wordt ondersteld dat de functie $c_{jk}(\cdot)$ gelijk is aan minus het verschil tussen de opgerente waarde naar s van de betalingen in toestand k en j:

$$c_{jk}(s) = \int_0^s e^{\delta(s-v)}\, d[\overline{B_k}(v) - \overline{B_j}(v)].$$

Toon met behulp van [1] aan dat de voorziening in toestand j op tijdstip t gelijk is aan de opgerente waarde van de betalingen (premies minus uitkeringen) in toestand j, indien $V_j(0) = 0$:

$$V_j(t) = -\int_0^t e^{\delta(t-v)}\, d\overline{B_j}(v). \qquad [2]$$

b. Laat vervolgens zien dat voor iedere t, en iedere j, k $[c_{jk}(t) + V_k(t) - V_j(t)] = 0$, hetgeen betekent dat we te maken hebben met een zuiver spaarcontract. Toon met behulp van de differentiaalvergelijking van Thiele

$$dV_j(t) = \delta\, V_j(t)\, dt - \sum_k [c_{jk}(t) + V_k(t) - V_j(t)]\, \mu_{jk}(t)\, dt - d\overline{B_j}(t), \quad j \in N. \qquad [3]$$

aan dat hier omgekeerd weer formule [2] uit resulteert.

Uitwerking tentamen Markovmodellen in het actuariaat d.d. 30 maart 2005

1 Vervang in de formule voor de voorziening t door s. Kies vervolgens $\delta = 0$, verder wordt de verzekering op s in j afgesloten. Uitkering bij verblijf in k op tijdstip t is gelijk aan 1, uitkering +1 bij overgang $r \to k$, $\forall r$ over $[s, t]$, elders 0, uitkering -1 bij overgang $k \to r$, $\forall r$ over $[s, t]$, elders 0. Koopsom $V_j(s)$ op tijdstip 0, dan krijgen we:

$$V_j(s) = -\int_s^t dq_{j,Nk}(s,u) + \int_s^t dq_{j,kN}(s,u) + p_{jk}(s,t)$$

Voor $t = s$ volgt $V_j(s) = p_{jk}(s,s) = \delta_{jk}$.

Dit leidt tot

$$p_{jk}(s,t) = \delta_{jk} + q_{j,Nk}(s,t) - q_{j,kN}(s,t).$$

2a Pr[S>s, T>t] met $0 \le s \le t$ stelt voor de kans dat (y) leeft op tijdstip t, waarbij (x) die leeft op s op t nog in leven is, dan wel overleden is.
Beiden in leven op t: de kans hierop is $p_{00}(0,t)$; de andere kans is $p_{00}(0,s)\,p_{01}(s,t)$.

Pr[T>t] de kans dat (y) leeft op t, dit is het geval in zowel toestand 0 als toestand 1, zodat
$\Pr[T>t] = p_{00}(0,t) + p_{01}(0,t)$.

$s > t \ge 0$ $\Pr[S>s, T>t] = p_{00}(0,s) + p_{00}(0,t)\,p_{02}(t,s)$.
$s \ge 0$ $\Pr[S>s] = p_{00}(0,s) + p_{02}(0,s)$.

2b $0 \le s \le t$

$$\Pr[S>s, T>t] = \exp[-\int_0^t \{\mu_{01}(u)+\mu_{02}(u)\}\,du] + \int_s^t \exp[-\int_0^v \{\mu_{01}(u)+\mu_{02}(u)\}\,du]\,\mu_{01}(v)\exp[-\int_v^t \mu_{13}(u)\,du]\,dv$$

$$\Pr[T>t] = \exp[-\int_0^t \{\mu_{01}(u)+\mu_{02}(u)\}\,du] + \int_0^t \exp[-\int_0^v \{\mu_{01}(u)+\mu_{02}(u)\}\,du]\,\mu_{01}(v)\exp[-\int_v^t \mu_{13}(u)\,du]\,dv$$

2c $\mu_{01}(u) = \mu_{23}(u)$, $\mu_{02}(u) = \mu_{13}(u)$, $u \ge 0$. $0 \le s \le t$.

$$\Pr[S>s, T>t] = \exp[-\int_0^t \{\mu_{01}(u)+\mu_{02}(u)\}\,du] + \int_s^t \exp[-\int_0^v \{\mu_{01}(u)+\mu_{02}(u)\}\,du]\,\mu_{01}(v)\exp[-\int_v^t \mu_{02}(u)\,du]\,dv$$

$$= \exp[-\int_0^t \mu_{02}(u)\,du] \Big[\exp[-\int_0^t \mu_{01}(u)\,du] + \int_s^t \exp[-\int_0^v \mu_{01}(u)\,du]\,\mu_{01}(v)\,dv \Big]$$

$$= \exp[-\int_0^t \mu_{02}(u)\,du] \Big[\exp[-\int_0^t \mu_{01}(u)\,du] - \int_s^t d\,\exp[-\int_0^v \mu_{01}(u)\,du] \Big]$$

$$= \exp[-\int_0^t \mu_{02}(u)\,du]\, \exp[-\int_0^s \mu_{01}(u)\,du] \qquad [A]$$

$\Pr[T>t] = \exp[-\int_0^t \mu_{02}(u)\,du]$ [A] met $s = 0$

idem $\Pr[S>s] = \exp[-\int_0^s \mu_{01}(u)\,du]$,

zodat het gestelde volgt.

3a Substitutie van de uitkeringsfunctie c in [1] leidt tot

$$V_j(t)$$

$$= \sum_k \int_t^\infty e^{-\delta(s-t)} [c_{jk}(s) - \int_t^s e^{\delta(s-v)}\, d\overline{B_k}(v)]\, dp_{jk}(t,s)$$

$$= \sum_k \int_t^\infty e^{-\delta(s-t)} [\int_0^t e^{\delta(s-v)}\, d\overline{B_k}(v)]\, dp_{jk}(t,s) - \sum_k \int_t^\infty e^{-\delta(s-t)} [\int_0^s e^{\delta(s-v)}\, d\overline{B_j}(v)]\, dp_{jk}(t,s)$$

$$= \sum_k [\int_0^t e^{\delta(t-v)}\, d\overline{B_k}(v)] \int_t^\infty dp_{jk}(t,s) - \int_t^\infty e^{-\delta(s-t)} [\int_0^s e^{\delta(s-v)}\, d\overline{B_j}(v)]\, dp_{jN}(t,s)$$

$$= \sum_k [\int_0^t e^{\delta(t-v)}\, d\overline{B_k}(v)]\, [p_{jk}(t,\infty) - p_{jk}(t,t)] - \int_t^\infty e^{-\delta(s-t)} [\int_0^s e^{\delta(s-v)}\, d\overline{B_j}(v)]\, dp_{jN}(t,s)$$

$$= -\int_0^t e^{\delta(t-v)}\, d\overline{B_j}(v).$$

In de laatste stap gebruiken we dat

- $\int_0^t e^{\delta(t-v)}\, d\overline{B_k}(v) = 0$ voor absorberende toestanden,
- $p_{jk}(t,t) = 0$ voor $j \neq k$ en $p_{jj}(t,t) = 1$,
- $p_{jk}(t,\infty) = 0$ voor doorgangstoestanden toestanden en
- $dp_{jN}(t,s) = 0$.

3b Onmiddellijk volgt

$$[c_{jk}(t) + V_k(t) - V_j(t)]$$

$$= \int_0^t e^{\delta(t-v)}\, d[\overline{B_k}(v) - \overline{B_j}(v)] - \int_0^t e^{\delta(t-v)}\, d\overline{B_k}(v) + \int_0^t e^{\delta(t-v)}\, d\overline{B_j}(v) = 0.$$

Vergelijking van Thiele [3] reduceert dan tot

$$dV_j(t) = \delta\, V_j(t)\, dt - d\overline{B_j}(t), \quad j \in N. \qquad [4]$$

Links en rechts [4] vermenigvuldigen met $e^{-\delta t}$ geeft

$$e^{-\delta t}\, dV_j(t) - e^{-\delta t}\, \delta\, V_j(t)\, dt$$

$$= e^{-\delta t}\, dV_j(t) + V_j(t)\, de^{-\delta t}$$

$$= d[e^{-\delta t}\, V_j(t)]$$

$$= -\, e^{-\delta t}\, d\overline{B_j}(t), \quad j \in N. \qquad [5]$$

Integratie van [5] leidt tot het gevraagde resultaat, omdat $V_j(0) = 0$.