Tentamen Markovmodellen in het actuariaat d.d. 29 juni 2005, 14.00-17.00u

Puntenwaardering: ieder der vraagstukken 1, 2 en 3 telt even zwaar.

1 In hoofdstuk 6 van het leerboek wordt een schets van het bewijs gegeven van de gelijkheid:

$$p_{jk}(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{jk}^{(n)}(s,t). \tag{1}$$

Voor $n \geq 1$ worden de in deze gelijkheid optredende kansen P als volgt recursief gedefinieerd:

$$P_{jk}^{(n)}(s,t) = \sum_r \int_s^t P_{jr}^{(n-1)}(s,u)\, \mu_{rk}(u)\, P_k(u,t)\, du. \tag{2}$$

Verder is in het boek afgeleid dat

$$p_{jk}(s,t) = \delta_{jk}\, P_k(s,t) + \sum_r \int_s^t p_{jr}(s,u)\, \mu_{rk}(u)\, P_k(u,t)\, du. \tag{3}$$

a. Geef zelf de definitie van $P_{jk}^{(0)}(s,t)$.

b. Toon vervolgens met behulp van (2) en (3) aan dat

$$\begin{aligned} p_{jk}(s,t) = {} & \delta_{jk}\, P_k(s,t) + P_{jk}^{(1)}(s,t) \\ & + \sum_r \int_s^t \Big[\sum_\ell \int_s^u p_{j\ell}(s,v)\, \mu_{\ell r}(v)\, P_r(v,u)\, dv\Big]\, \mu_{rk}(u)\, P_k(u,t)\, du. \end{aligned} \tag{4}$$

c. Schets de verdere loop van het bewijs van (1).

2 Op het tijdstip 0 wordt een verzekeringscontract afgesloten in toestand i met een duur van n jaar tegen n-jarige prenumerando premiebetaling P bij verblijf in toestand i. Verzekerd is gedurende deze n jaar een uitkering $+\ {}_{\lceil t\rceil - t|}\ddot{a}_{\overline{n-\lceil t\rceil}|}$ bij *uittreding* uit toestand k, en bovendien een uitkering $-\ {}_{\lceil t\rceil - t|}\ddot{a}_{\overline{n-\lceil t\rceil}|}$ bij *toetreding* tot toestand k.

Genoemde uitkeringen vinden plaats op het tijdstip van overgang. Er zijn geen uitkeringen bij verblijf in toestanden meeverzekerd. In het volgende is ondersteld dat zowel de premie, de voorziening als de uitgestelde vaste rente bepaald zijn op basis van rente-intensiteit δ.

a. Stel de integraalformule op voor de prospectieve voorziening voor het tijdstip m (m geheel, $0 \leq m \leq n$) als het contract alsdan in toestand j verblijft; in deze voorziening is P vooralsnog onbekend. Herleid de formule tot een uitdrukking waarin slechts prenumerando renten optreden alsmede de premie P. Gebruik bij uw herleiding o.a. partiële integratie en geïtereerde integratie.

b. Bewijs vervolgens dat uit het equivalentiebeginsel volgt dat $P = [\delta_{ik}\, \ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{ik}(0,n)] / \ddot{a}_{ii}(0,n)$.

3a Leid uitgaande van de vergelijking in differentiaalvorm van Thiele

$$dV_j(t) = \delta\, V_j(t)\, dt - \sum_k \,[c_{jk}(t) + V_k(t) - V_j(t)]\, \mu_{jk}(t)\, dt + d[\Pi_j(t) - B_j(t)], \quad j \in N, \tag*{[1]}$$

af dat geldt

$$V_j(t) = \sum_k \int_t^\infty e^{-\delta(u-t)}\, P_j(t,u)\, c_{jk}^*(u)\, \mu_{jk}(u)\, du - \int_t^\infty e^{-\delta(u-t)}\, P_j(t,u)\, d[\Pi_j(u) - B_j(u)]. \tag*{[2]}$$

Hierbij $c^*_{jk}(u)$ zelf te bepalen. Geef tevens een verbale omschrijving van [2].

Aanwijzing:
Vermenigvuldig eerst linker- en rechterlid van (1) met $e^{-\delta t} P_j(0,t)$, waarbij $P_j(0,t) = \exp[-\int_0^t \mu_{jN}(u)\,du]$, en herleid de gevonden vergelijking in differentiaalvorm tot een vergelijking in differentiaalvorm waarvan het linkerlid gelijk is aan $d[e^{-\delta t} P_j(0,t)\, V_j(t)]$. Werk e.e.a. verder uit.

3b Toon vervolgens uitgaande van [2] voor het bijzondere geval dat $d[\Pi_j(u) - B_j(u)] \equiv 0$ aan dat geldt

$$\sum_k \int_t^\infty e^{-\delta(u-t)} P_j(t,u)\, R_{jk}(u)\, \mu_{jk}(u)\, du = V_j(t) + \int_t^\infty e^{-\delta(u-t)} V_j(u)\, d_u P_j(t,u).$$

Hierin stelt $R_{jk}(u)$ voor het risicokapitaal voor tijdstip u voor de overgang $j \rightarrow k$.

Uitwerking tentamen Markovmodellen in het actuariaat d.d. 29 juni 2005

1a $P^{(0)}_{jk}(s,t) = \delta_{jk}\, P_k(s,t) = \delta_{jk} \exp[-\int_s^t \mu_{kN}(u)\, du].$

1b $$p_{jk}(s,t) = \delta_{jk}\, P_k(s,t) + \sum_r \int_s^t p_{jr}(s,u)\, \mu_{rk}(u)\, P_k(u,t)\, du. \qquad (3)$$

leidt na vervanging van toestanden en tijdstippen tot

$$p_{jr}(s,u) = \delta_{jr}\, P_r(s,u) + \sum_\ell \int_s^u p_{j\ell}(s,v)\, \mu_{\ell r}(v)\, P_r(v,u)\, dv. \qquad (3)'$$

Substitutie van (3)′ in (3) geeft

$$\begin{aligned}
&p_{jk}(s,t)\\
&= \delta_{jk}\, P_k(s,t) + \sum_r \int_s^t \delta_{jr}\, P_r(s,u)\, \mu_{rk}(u)\, P_k(u,t)\, du\\
&\qquad + \sum_r \int_s^t [\sum_\ell \int_s^u p_{j\ell}(s,v)\, \mu_{\ell r}(v)\, P_r(v,u)\, dv]\, \mu_{rk}(u)\, P_k(u,t)\, du\\
&= \delta_{jk}\, P_k(s,t) + \int_s^t P_j(s,u)\, \mu_{jk}(u)\, P_k(u,t)\, du\\
&\quad + \sum_r \int_s^t [\sum_\ell \int_s^u p_{j\ell}(s,v)\, \mu_{\ell r}(v)\, P_r(v,u)\, dv]\, \mu_{rk}(u)\, P_k(u,t)\, du\\
&= \delta_{jk}\, P_k(s,t) + P^{(1)}_{jk}(s,t) + \sum_r \int_s^t [\sum_\ell \int_s^u p_{j\ell}(s,v)\, \mu_{\ell r}(v)\, P_r(v,u)\, dv]\, \mu_{rk}(u)\, P_k(u,t)\, du. \qquad (4)
\end{aligned}$$

In (4) kunnen we stellen

$$R_1 = \sum_r \int_s^t [\sum_\ell \int_s^u p_{j\ell}(s,v)\, \mu_{\ell r}(v)\, P_r(v,u)\, dv]\, \mu_{rk}(u)\, P_k(u,t)\, du. \qquad (5)$$

1c $p_{j\ell}(s,v)$ kan overeenkomstig (3) worden geschreven als

$$p_{j\ell}(s,v) = \delta_{j\ell}\, P_\ell(s,v) + \sum_h \int_s^v p_{jh}(s,w)\, \mu_{h\ell}(w)\, P_\ell(w,v)\, dw.$$

Deze uitdrukking kan in (4) worden gesubstitueerd, etc., etc.
We krijgen dan

$$p_{jk}(s,t) = P^{(0)}_{jk}(s,t) + P^{(1)}_{jk}(s,t) + \dots + P^{(n)}_{jk}(s,t) + R_n.$$

Aangetoond kan worden dat $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ indien de μ's begrensd zijn tussen 0 en een positieve constante C.

2a $V_j(m)$

$$= \sum_{\ell,r} \int_0^{n-m} e^{-\delta t}\, c_{\ell r}(m+t)\, dq_{j,\ell r}(m, m+t)$$

$$- \sum_r \int_0^{n-m} e^{-\delta t}\, p_{jr}(m, m+t)\, d[\Pi_r(m+t) - B_r(m+t)]$$

$$= - \int_0^{n-m} e^{-\delta t}\, {}_{\lceil t \rceil - t|}\ddot{a}_{\overline{n-m-\lceil t \rceil}|}\, d[q_{j,Nk}(m, m+t) - q_{j,kN}(m, m+t)]$$

$$- P \int_0^{n-m} e^{-\delta t}\, p_{ji}(m, m+t)\, d\lceil t \rceil$$

$$= - \int_0^{n-m} \left(\int_t^{n-m} e^{-\delta s}\, d\lceil s \rceil \right) dp_{jk}(m, m+t) - P\, \ddot{a}_{ji}(m, n)$$

$$= - p_{jk}(m, m+t) \int_t^{n-m} e^{-\delta s}\, d\lceil s \rceil \Big|_{t=0}^{n-m} + \int_0^{n-m} p_{jk}(m, m+t)\, d \int_t^{n-m} e^{-\delta s}\, d\lceil s \rceil - P\, \ddot{a}_{ji}(m, n)$$

$$= 0 + \delta_{jk} \int_0^{n-m} e^{-\delta s}\, d\lceil s \rceil - \int_0^{n-m} e^{-\delta t}\, p_{jk}(m, m+t)\, d\lceil t \rceil - P\, \ddot{a}_{ji}(m, n)$$

$$= \delta_{jk}\, \ddot{a}_{\overline{n-m}|} - \ddot{a}_{jk}(m, n) - P\, \ddot{a}_{ji}(m, n).$$

In bovenstaande gebruik is gemaakt van

1) $p_{jk}(s, t) = \delta_{jk} + q_{j,Nk}(s, t) - q_{j,kN}(s, t)$.

2) $\int_{\lceil t \rceil}^{n-m} e^{-\delta s}\, d\lceil s \rceil = \int_t^{n-m} e^{-\delta s}\, d\lceil s \rceil$

2b $V_i(0) = 0$, dus $0 = \delta_{ik}\, \ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{ik}(0, n) - P\, \ddot{a}_{ii}(0, n)$,

zodat volgt:

$$P = [\delta_{ik}\, \ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{ik}(0,n)] \,/\, \ddot{a}_{ii}(0,n).$$

3a $d[e^{-\delta t} P_j(0, t)\, V_j(t)] = e^{-\delta t} P_j(0, t)\, dV_j(t) + V_j(t)\, d[e^{-\delta t} P_j(0, t)]$

$$= e^{-\delta t} P_j(0, t)\, dV_j(t) + e^{-\delta t} V_j(t)\, dP_j(0, t) + V_j(t)\, P_j(0, t)\, de^{-\delta t}$$

$$= e^{-\delta t} P_j(0, t)\, [dV_j(t) + V_j(t) \sum_k \mu_{jk}(t)\, dt - \delta V_j(t)\, dt]$$

Dan volgt mbv Thiele

$$d[e^{-\delta t} P_j(0,t)\, V_j(t)] = e^{-\delta t} P_j(0,t)\, [-\sum_k c^*_{jk}(t)\, \mu_{jk}(t)\, dt + d\Pi_j(t) - dB_j(t)] \qquad [3]$$

met $c^*_{jk}(t) = c_{jk}(t) + V_k(t)$.

Vervanging van t door u in [3] gevolgd door integratie over $[t, \infty)$ geeft aangezien $V_j(\infty) = 0$:

$$e^{-\delta t} P_j(0,t)\, V_j(t)$$

$$= \sum_k \int_t^\infty e^{-\delta u} P_j(0,u)\, c^*_{jk}(u)\, \mu_{jk}(u)\, du - \int_t^\infty e^{-\delta u} P_j(0,u)\, d[\Pi_j(u) - B_j(u)]. \qquad [4]$$

Delen door $e^{-\delta t} P_j(0,t)$ geeft het gestelde omdat

$$P_j(0,t)\, P_j(t,u) = P_j(0,u).$$

[2] stelt voor de voorziening voor een contract dat op t in j wordt afgesloten; het contract geeft slechts uitkeringen bij de eerste overgang van uit j (gelijk aan $c_{jk}(u) + V_k(u)$), uitkeringen bij verblijf in toestand j zolang het contract niet uit j uitgetreden is, idem premiebetaling.

3b Voor dit bijzondere geval volgt uit [2]:

$$V_j(t)$$

$$= \sum_k \int_t^\infty e^{-\delta(u-t)} P_j(t,u)\, [c_{jk}(u) + V_k(u)]\, \mu_{jk}(u)\, du$$

$$= \sum_k \int_t^\infty e^{-\delta(u-t)} P_j(t,u)\, [c_{jk}(u) + V_k(u) - V_j(u)]\, \mu_{jk}(u)\, du$$

$$+ \sum_k \int_t^\infty e^{-\delta(u-t)} P_j(t,u)\, V_j(u)\, \mu_{jk}(u)\, du$$

$$= \sum_k \int_t^\infty e^{-\delta(u-t)} P_j(t,u)\, R_{jk}(u)\, \mu_{jk}(u)\, du - \int_t^\infty e^{-\delta(u-t)} V_j(u)\, d\,P_j(t,u).$$